Maria Karaivanova
ORCID: 0000-0002-8124-2233
Academy of music, dances and fine art
Plovdiv, Republic of Bulgaria

ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ В ИНКЛЮЗИВНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Interdisciplinary modelling for studying fractions in inclusive education

https://doi.org/10.34739/sn.2020.20.06

Abstract: It describes the necessity of development of educational content in inclusive education. The integration of heterogeneous educational content through elementary mathematical modeling is presented as a tool of defining content cores to standardize the levels of preparation in affiliated education. Such a plan examines the study of „Fractions" through mathematical modeling in music. The educational results of students with intellectual disabilities who participated in the research are presented.
Keywords: *integration, modeling, dimension relationships*

РЕЗЮМЕ: Рассматривается необходимость в развитии учебното содержания в приобщающем образовании. Интеграция разнородного учебного содержания через элементарное математическое моделирование представлено как средство для определения содержательных ядер, которые должны стандартизировать уровни подготовки в приобщавающем образовании. В таком плане исследуется изучение темы „Дроби" через математическое моделирование в музыке. Представлены образовательные результаты учеников с интеллектуальным дефицитом, участвовавших в научном исследовании.
Ключевые слова: *интеграция, моделирование, отношения величин*

Идея многогранного, всеобъемлющего равноправия людей с ограниченными возможностями в обществе предполагает, что они достигнут не только *жизни как другие*, а и *жизни с другими*. Основным инструментом для реализации этой идеи является *приобщающее образование*.

В последние годы набирает скорость включение в *совместный образовательный процесс* учеников в норме и их сверстников с нарушениями. Практика до настоящего времени безусловно показывает, что общеобразовательное учебное содержание не приспособлено к общей учебной деятельности, в которой оптимально развивались бы ученики обеих категорий: в норме и с ограниченными возможностями.

Стремление в образовании сделать научный прогресс все более полным, как это ни парадоксально, ведёт к образовательному дефициту в подростковом поколении. Для большей части детей в норме учебное содержание не соответствует природно обусловленным темпам их развития и их возрастным возможностям. Порождаются тормозящие процессы, которые ощутимо препятствуют личностному развитию таких учеников.

При этих условиях считается естественным, чтобы *процесс включения* осуществлялся с *модификацией учебного содержания*, т.е. исключалось бы содержание, занижались бы уровни стандартов и ожидаемых образовательных результатов, в соответствии с возможностями индивида. *Дифференциация при преподавании*, призванная достичь соответствия между спецификой каждого ученика с нарушениями и учебной деятельностью, не в состоянии компенсировать содержательный дефицит, который модификация накапливает с течением времени.

Идея *адаптации учебного содержания*, выдвинутая Калифорнийской инициативой по созданию позитивных сред и сетей для преподавателей (PENT) связывается с *допустимыми изменениями* в образовательных средах и сетях, призванных обеспечить ученикам с нарушениями не только доступ, достижения и пользы, а и *уровни достижений* в их приобщении к общеобразовательной системе. В таком плане адаптация рассматривается как оптимальное совмещение модификации и дифференциации *с целью повышения эффективности приобщающего образования.*

В этой связи рекомендуется определять *содержательное ядро,* которое будет задавать *уровень достижений* в изучении определённой тематики. Эта задача вменяется учителям! Они должны уточнять базисные понятия, сущностные факты, которые включены в подходящие контексты и виды деятельности, осмысливать их прикладную сторону и определять ожидаемые результаты. Предполагается, что они будут преодолевать содержательный образовательный дефицит, вытекающий из конкретной модификации, и полноценно развивать учеников со специальными образовательными потребностями [Levterova-Gadžalova, 2019].

В таком плане отдельные учителя имеют свои достижения. Но они не могут рассматриваться как устойчивое развитие общеобразовательного учебного содержания, которое гарантирует равнопоставленность всех учеников в учебном процессе приобщающего образования. Вопрос: как ученикам с нарушениями участвовать в учебной деятельности, не только „как другие“, а и „с другими“, остаётся открытым!

Крайне важно, чтобы общеобразовательное учебное содержание было ориентировано на учебный процесс, в котором ученики *в норме* и ученики *с ограниченными возможностями* обучаются одновременно. Для каждого ученика обеих категорий процесс должен быть эффективным. Это предполагает, что весь тематический объём, заложенный в общеобразовательных программах, должен стать предметом *целенаправленной научно-исследовательской работы*, которая выведет стандарты для *содержательного ядра и его соответствующих дидактических проекций*. На такой основе уже можно будет говорить об *адаптации учебного содержания, которая не занижает уровни образовательных результатов*.

Сказанное в высшей степени относится к тематике, которая очень затрудняет учеников в норме. В условиях приобщающего образования педагоги считают естественным исключать или отмечать формально наличие подобной тематики в обучении учеников с ограниченными возможностями. Результатом авляется маргинализация этих учеников в отношении достигаемых образовательных уровней.

Адаптация учебного содержания по таким темам достижима при максимальной *активации нереализированного потенциала развития*, которым, согласно Л.С.Выготскому, обладают ученики со специальными образовательными потребностями. Потенциал для развития остаётся неиспользованным и у учеников в норме, когда сложность учебного содержания не соответствует их познавательным возможностям. У обеих категорий учеников нереализованный потенциал может быть раскрыт путём, совмещения новых подходов к традиционному учебному содержанию с новыми коррекционно-развивающими стратегиями.

В таком плане разрабатывается *интердисциплинарный модельный подход* и исследуется его эффективность в продолжение десятилетий. Исследование проводится параллельно с обеими категориями учеников: со специальными образовательными потребностямии и в норме. Установлено, что потенциальные, всё ещё невыраженные способности и свойства личности раскрыюваются, когда разнородное учебное содержание интегрируется через применение элементарного математического моделирания. Ученики в норме и ученики с нарушениями устойчиво овладевают *содержательными ядрами*, обуславливающими *соизмеримость образовательных результатов*.

Подобная соизмеримость достигается при интегративном изучении трудного для учеников математического понятия „простая дробь“ и связанных с ним различных типов компетенций: академических, практических, коммуникативных, социальных... [Kara-ivanova 2019].

1. Правильная дробь и её изучение

Понятие *простая дробь* (правильная или неправильная) является одним из твёрдых орешков для учеников в общем образовании, а ещё больше – для их сверстников с нарушениями.

В отличие от целых чисел, которые вводятся только путём подсчёта ясно обособленных объектов, дробь получается *двумя последовательными операциями:* деление и после него счёт. Но что делится и что считается? Делится что-то целое на *b* равных частей, отсчитывается *a* полученных частей, получается дробь, которая записывается: „$\frac{a}{b}$“ и читается: „*a* на *b*“.

Выглядит просто, но подростки трудно это осознают. Затруднения учеников естественны из-за:

- *Высокой степени абстрактности.* Исходное понятие *целое* имеет слишком много разнородных проявлений, а в каждом конкретном случае обе операции: *деление на равные части* и *подсчёт* некоторых частей имеют *многочисленные числовые интерпретации*;
- *Инверсии альфавитного порядка,* в котором функционируют числа *a* и *b*. *Образование дроби начинается с числа b, а её запись – с числа a*. Алфавитный порядок в записи и наименование дробного числа: „*a* на *b*“ сильно вводит в заблуждение 12-летних учеников, и они ошибочно определяют последовательность действий, ведущими к получению дробного числа. Построение количественных представлений о дробях затрудняется.

Вопреки дидактической сложности (или может быть точно из-за неё) в школе не дефинируется понятие дробь, а выясняется через визуальные представления, например, через образ круговой формы (торт, пицца…), разделённой на части. Равенство частей оставлено по умолчанию, но видят ли ученики получающиеся круговые секторы как равные? Равные чему – длина, площадь, объём, вес, цвет…? Такую же неопределённость предлагют и другие используемые примеры.
Подобный умозрительный подход можно определить как крайне неэффективный.

Ученики в *норме* создают *размытые представления о* модели дробей вида: $\frac{a}{b}$ и избегают их, даже когда их применение облегчает ешение математических задач. Ученики с *нарушениями* приобретают *беглые, скудные*, часто *запутанные представления* о простой дроби и легко наполняют их ошибочным смыслом. В конечном итоге, правильные дроби быстро отпадают от математической грамотности учеников обеих категорий и никогда им ни для чего не служат.

Необходимы ли эти дроби вооруженному калькулатором современному человеку? Как определить степень их присутствия в приобщающем образовании? И, наконец, как отдельному ученику осознанно овладеть этим математическим понятием?

Необходимость в знании и владении простыми дробями легко доказуема. В ряде познавательных областей действие широко распространённых десятичных дробей сильно ограничено, и простые дроби оказываются там незаменимыми. Одной из таких областей является музыка и именно она предлагает возможности для эффективного изучения математической тематики, в частности, простых дробей. Эти возможности уходят корнями ещё в древность и заложены в интеграции между математикой и музыкой, которую нам завещал Пифагор. Он исследует магию музыки с *отношениями величин* и органично связывает её с *дробными числами*.

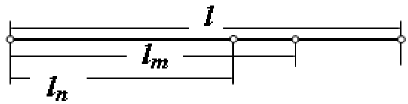
Интеграция между математикой и музыкой предлагает *новый, интердисциплинарный модельный подход к учебному содержанию*, который даёт толчок в развитии учеников с различными возможностями – от одарённости в той или иной области, до ограниченности из-за нарушений. Этот подход реализуется в учебной деятельности на основе *теоретической разработки*, которая интегрирует математику и музыку посредством современных образовательных стандартов [Karaivanova, 2009].

2. Оразмерение вибрирующей струны для изучения простых дробей

2.1. Дробные числа и числовые отношения в музыке

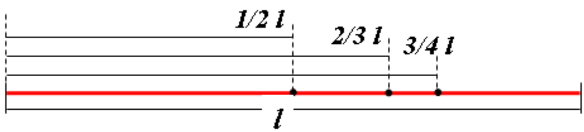
Благозвучие в музыке, которое радует чувства, имеет свою числовую интерпретацию. Как известно, длина вибрирующей струны и высота музыкального тона, который она издаёт, находятся в однозначно определённой зависимости. На этой основе Пифагор (VI в.до н.э.)

берётся разгадать магию музыкальной гармонии. Из длины вибрирующей струны и длины различных её частей он образует *числовые отношения*, которые принимает за *характеристику созвучности* между основным тоном и соответствующими частичными тонами (Фиг. 1).



Фиг. 1. ***l*** – целая длина (основной тон); $\boldsymbol{l_m}$, $\boldsymbol{l_n}$ – длины частей от ***l*** (частичные тоны)

Опираясь на философские идеи и мифичные верования, Пифагор определяет четыре длины, из которых извлекаются четыре наиболее благозвучных между собой тона: *l*; *1/2 l*; *2/3 l*; *3/4 l*. Философ принимает, что по этим тонам была настроена лира Орфея, которая помогает мифическому герою покорять живую и неживую природу (Фиг. 2).



Фиг. 2. Геометрическая и числовая модель орфеева строя

Комбинированные в пары, тоны этого *орфеева строя* определяют наиболее благозвучные музыкальные интервалы, и они по сей день лежат в основе музыкальной теории. Пифагор исследует эти интервалы (упорядоченные пары тонов) и определяет благозвучие каждого из них соотношением соответствующих длин (Фиг. 3).

1/2 = *(l; 1/2 l)*	– *октава*
2/3 = *(l; 2/3l) = (3/4l; 1/2l)*	– *квинта*
3/4 = *(l; 3/4 l) = (2/3l; 1/2l)*	– *кварта*
8/9 = *(3/4l; 2/3l)*	– *секунда*

Фиг. 3. Орфеевы музыкальные интервалы

Посредством полученных «музыкальных соотношений» Пифагор находит другие длины, из которых извлекает новые музыкальные тоны и организует гаммы: диатоническую и хроматическую. Таким образом, он закладывает основы музыкальной теории.

В течение времени науки математика и физика обобщают эти открытия Пифагора и делают возможным моделирование музыкальных категорий и их организацию в музыке современными математическими средствами. Одним из основных инструментов для подобного моделирования являются дробные числа.

Музыкальный интервал, определяемый упорядоченной парой тонов и его благозвучностью, задаётся с помощью математической модели (Фиг. 4):

$$(l_m; l_n) = \frac{l_n}{l_m},$$

$$n \leq m.$$

Фиг. 4. Математическая модель музыкального интервала

Эталонные степени благозвучности характеризуются числовыми соотношениями типа:

$$\frac{n}{n+1}$$

где *n* – естественное число.

Когда *n* примет значения: *n* = 1, 2, 3, соответствествующие дроби: 1/2; 2/3 и 3/4 моделируют наиболее благозвучные интервалы орфеева строя.

Правильные дроби, полученные для различных значений *n*, вступают в следующие две роли:

– *Оператор умножения* – применённый к целой длине, он определяет её часть, из которой звучит *новый тон,* и выстраивает этот тон в ряд по высоте относительно основного тона;

– *Акустическое значение* – задаёт числовым отношением *созвучность интервала* между двумя тонами: основным и полученным от него частичным.

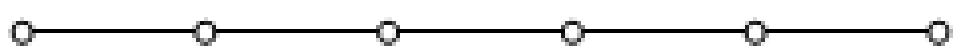
Математическое моделирование тонов и интервалов в орфеевом строе может послужить *технологической моделью для* введения и изучения дробных чисел.

2.2. Алгоритм образования дробного числа. При извлечении музыкального тона устанавливаются однозначно определяемые связи: «образ (отрезок) – число – звук». *Отрезок и его длина* являются, соответственно, *геометрической и числовой моделью* как вибрирующей струны, так и *тоновой высоты,* которую она издаёт. От струны получаются различные тоны через её деление на равные части.

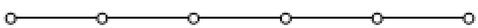
Если отрезок-струна будет принята за «целое», то её разделение на равные части и выбор некоторых из них моделируют связи «*о*браз – число – тон». Таким образом, введение правильной дроби может быть «озвучено» и алгоритмизировано.

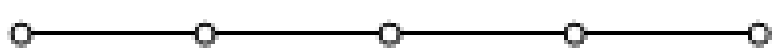
Алгоритм образования дроби $\frac{a}{b}$, при условии, что *a* < *b*:

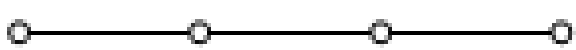
<u>*I шаг*</u>: Деление целого (отрезок-струна) на *b* равных частей;

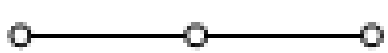
Напр. для *b*= 5: 

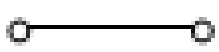
<u>*II шаг*</u>: Разделение *a* на число равных частей и соответствующая запись.

Если *a*= 5:  , то $\frac{a}{b} = \frac{5}{5}$;

Если *a*= 4:  ,то $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$;

Если *a*= 3:  , то $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$;

Если *a*= 2:  , то $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$;

Если *a*= 1:  , то $\frac{a}{b} = \frac{1}{5}$.

Отрезок-струна делится последовательно на две, три, четыре, восемь равных частей и с точно определёнными количествами равных частей воспроизводятся музыкальные тоны. Разделение может быть выполнено различными способами: *измерением и вычислениями*; *геометрическим моделированием* (Талес Милетский, VII в.пр.н.е.); *сгибанием узкой ленточки*. Все три способа по отдельности или в комбинации создают условия для активного участия каждого ученика в учебной работе и делают размеривание струны доступным для всех.

Моделируемая с помощью отрезка вибрирующая струна позволяет быстрый переход от эвклидова к физическому пространству и наоборот. Рассуждения об образовании дроби поддерживаются звуковыми представлениями, а изменения числителя и знаменателя связывают с изменениям тоновых высот.

В ходе исследовательской деятельности устанавливается, что моделирование орфеева строя ученики обеих категорий: в норме и с нарушениями, устойчиво овладевают алгоритмом для образования правильной дроби и использует её при различных значениях знаменателя и числителя. Так приобретают *обобщённое представление о* правильной дроби и *практические навыки для* воспроизведния определённых тонов.

2.3. Дидактический потенциал. В условиях классно-урочной системы, где исследуется интегративное изучение *орфеева строя* и *простые дроби*, наблюдается устойчивая *мотивация* и *активность* учеников в образовательных процессах. Изучение математики и музыки углубляется постепенно и в симбиозе, которая развивает *познавательные способности* участников в исследовании и культивирует их чувствительность. Учебная деятельность становится более эффективной, а *образовательные результаты* по математике и музыке – более долговечными.

Модельный подход в интегративном изучении математики и музыки ориентирует учебную деятельность к *полноценной грамотности в обеих* областях. Создаётся *интегративный образовательный контекст* в котором реализуется:

- *Пропедевтика и обогащение общеобразовательных стандартов*. Приобретённые знания и навыки являются базовыми при изучении *основных категорий в математике* (часть целого, отношение двух величин, пропорциональность, функциональная зависимость…) и *в музыке* (гаммы, моделирование мажорной или минорной тональности, интервалы, ладовые структуры, функции диатонических ступеней, кварто-квинтовый круг тональностей…);
- *Интердисциплинарная интерпретация образовательных стандартов*. Количественные отношения, с которыми связано изучение различниых познавательных областей, превращают дробные числа в абстрактные носители разнообразного конкретного содержания. В этом своём качестве они обуславливают известную степень проходимости в принятых за непреодолимые границы между разнородными науками. Дроби оказываются соединительными узлами между родственными и разнородными познавательными областями, среди которых и музыка.

Математический заряд «музыкальных отношений» генерирует их проекции в образовательный процесс и обогащает его:

- *эмоциональным пластом*, который обуславливает *активность* учеников в учебной деятельности;
- *разнородным содержательным контекстом*, который развивает их *мотивационную сферу* и культивирует *широкие интересы*.

На этой основе ученики приобретают *общую грамотность более высокого порядка*, связанную со способностью переносить приобретённые знания и навыки *в новые условия*. Овладение дробными числами как инструментом для моделирования в музыке реализуется через метод: «*моделирование интегрированных ситуаций*». Он распространяет интердисциплинарный подход в сферу других учебных дисциплин: математика, история, мифология, литература, изобразительные искусства… и вписывает в культурный контекст интегративное изучение простых дробей и орфеева музыкального строя.

Интегративные сязи выстраиваются через решение *системы учебных задач различной степени сложности*, которая даёт возможность каждому ученику участвовать в процессе, в соответствии со своими познавательными возможностями. Создаются *условия для развития* всех учеников, включительно учеников *с выраженными интересами* и их сверстниками *с нарушениями.*

Ученики *с природными способностями* в математике или музыке обогащают интегрированные ситуации, решая задачи, углубляющие их подготовку в соответствующей области.

Ученики *с нарушениями* включаются в моделирование интегрированных ситуаций, применяя основные понятия и закономерности на том уровне, на котором ими владеют.

Метод «моделирования интегрированых ситуаций» даёт возможность определить *содержательное ядро* по теме «Дробные числа», что может и должно быть целью в приобщающем образовании. Оно включено во все дидактические проекции, применяемые при моделировании. Проекции, со своей стороны, выявляют индивидуальные возможности учеников и определяют *степень соизмеримости* уровней достигнутых ими образовательных результатов.

3. Коррекционно-развивающий эффект

В исследовании о соизмеримости образовательных результатов, достигнутых через интегративное изучение темы «Дроби», включены ученики с интеллектуальным дефицитом различной степени (лёгкая, умеренная, тяжёлая). Для целей исследования были разработаны гибкие педагогические технологии, которые предлагают с различной степенью доступности научное познание, связанное с *дробями* и *орфеевым строем*.

Специально разработанные коррекционно-компенсаторные средства (квадратная сетка, тонкий шнур, раздаточный материал,...) дают возможность каждому ученику с нарушениями овладеть, в соответствии со своими возможностями, алгоритмом образования

дробного числа и моделировать связь «музыкальный тон – число». Исследование доказывает, что ученики с нарушениями развивают способность применять дробные числа как моделирующий познавательный инструмент в других областях.
Пример в этом отношении предлагает тема: «Моделирование проекта цветочной клумбы в парке», которая включает:

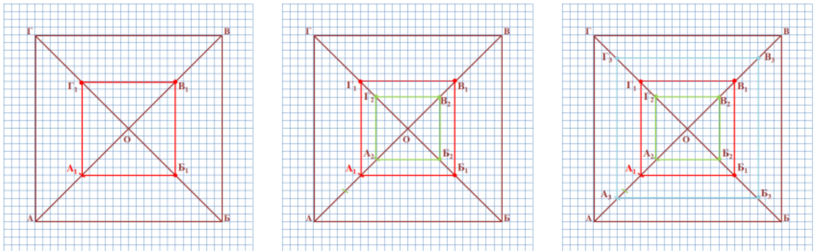
- геометрическое моделирование проекта цветочной клумбы через вписанные правильные четырёхугольники;
- экологическую (ботаническую, социальную, художественную) интерпретацию проекта;
- моделирование части парка Версаль (Франция). Творческую художественную и ботаническую интерпретацию модели.

Интегративный контекст, в котором реализируется моделирование, включает знания и навыки из следующих областей: математика, музыка, биология, экология, география, изобразительное искусство. Каждый из участниов в исследовании включается (с или без помощи) в различные этапы моделирования по своим возможностям, применяя знания и умения, которыми владеет.

С помощью квадратной сетки ученики с нарушениями моделируют квадрат и определяют его элементы (вершины, диагонали, центр симметрии,...). Они, подобно архитекторам эпохи ренессанса Палладио и Алберти, моделируют вписанные один в другой квадраты, определяя их диагонали в наиболее благозвучных музыкальных отношениях (1/2; 2/3; 3/4) с основной диагональю (Фиг. 5).

Полученную фигуру интерпретируют как парковый элемент. Подбирают цветовые сочетания растительности, располагают различные виды растений с учётом благоприятных для них условий, проектируют изготовление сооружений для отдыха, отвечающих человеческим потребностям.

Моделирование интегрированных ситуаций по разрабатываемой теме включает и ознакомление участников в исследовании с парком «Версаль», всемирно известной достопримечательности Парижа, столицы Франции.



а) Отношение 1/2; (октава)

б) Отношение 2/3; (квинта)

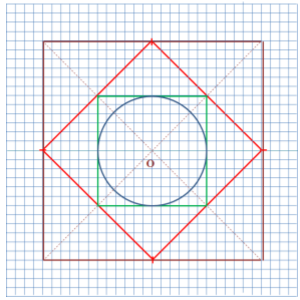
в) Отношение 3/4; (кварта)

Фиг. 5. Квадраты с общим центром симметрии, моделирование с музыкальными отношениями

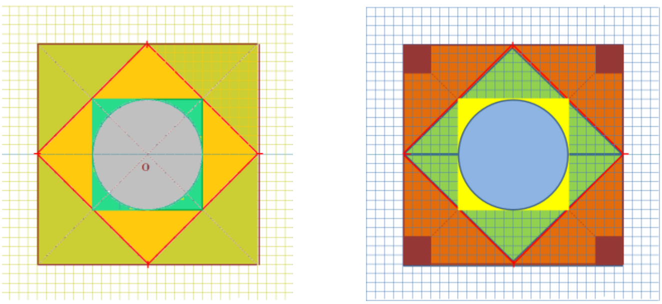
Одна из многочисленных разнообразных форм в парке «Версаль», представляет квадрат и называется «Остров детей» (Фиг. 6а). Ученики открывают, что этот парковый элемент разработан с музыкальным отношением 1/2 (октава). Самостоятельно воссоздают его уменьшенную модель (Фиг. 6б), интерпретируют её своими познаниями по ботанике и изобразительному искусству и творчески его обогащают (Фиг. 6в).

В моделирование интегрированных ситуаций ученики с нарушениями включаются настолько, насколько им позволяют возможности, но те знания и умения, которые применяют, являются частью целостного процесса. Это приносит детям ощущение полноценности. Развивается их способность применять в новых условиях то, что они знают и что оказывает *положительное влияние на интелектуальное и эмоционально-волевое формирование их личности.*

а) Париж, Версаль; «Остров детей»



б) Геометрическая модель



в) Художественное моделирование

Фиг. 6. Моделирование и творческая интерпретация элемента из парка «Версаль»

Проведённое исследование показывает, что в интегрировании разнородного учебного содержания через математическое моделирование заложены новые возможности для реализации полноценной инклюзии.

Интердисциплинарный модельный подход, применённый для изучения темы «Дроби», содействует:

1) раскрытию нереализованного *потенциала для развития* учеников обеих категорий: в норме и с нарушениями;
2) повышению *образовательных результатов* при изучении темы «Дроби»;
3) определению *содержательного ядра*, которое будет основой при изучении темы «Дроби» в приобщающем образовании;

4) подготовке учеников в соответствии с их возможностями *моделировать интегрированные ситуации* с применением дробных чисел.

Literature [Литература]

Karaivanova M.A. (2019), Matematičeskoe modelirovanie dlâ integrativnogo izučeniâ matematikii muzyki v osnovnom obrazovanii, [v:] Rangelova E. (red.), *Vzaimodejstvie na prepodavatelâ i studenta, vusloviâta na universitetskoto obrazovanie: teorii, tehnologii,upravlenie*, Eks-Pres, Gabrovo, s. 199-204.

Karaivanova M.A. (2009), *Matematičeskoto modelirane kato sredstvo za izučavane na muzika*, «Ûbileen godišnik Akademia za Muzikalno, Tancocovo i Izobrazitelno Izkustvo», s. 101-109.

Levterova-Gadžalova D. (2019), *Adaptirane na učebnoto s"d" ržanie za učenici s"s specialni obrazovatelni potrebnosti*, [v:] Rangelova E. (red.), *Vzaimodejstvie na prepodavatelâ i studenta, vusloviâta na universitetskoto obrazovanie: teorii, tehnologii, upravlenie*, Eks-Pres, Gabrovo, s. 232-237.