Zobaczyć ω_1

Adam KOLANY, Lipsk*

Zakładamy, że Czytelnik jest po kursie „Wstępu do Matematyki”. W szczególności, że znane mu są pojęcia takie jak *relacja równoważnościowa*, *klasa abstrakcji*, *porządek* (w szczególności porządek *dobry*). Wie, co to znaczy, że dwa porządki są *izomorficzne* i co to jest *odcinek początkowy* porządku. Wie także, co to jest *Pewnik Wyboru* i zna twierdzenie Zermeli o *dobrym uporządkowaniu.* No i, oczywiście, wie, co to są *zbiory przeliczalne.*

Z twierdzenia Zermeli wynika, że istnieje dobry porządek na prostej rzeczywistej. Skądinąd wiadomo, że w każdej niepustej rodzinie dobrych porządków istnieje porządek *minimalny.* To znaczy taki, który jest izomorficzny z odcinkiem początkowym każdego innego porządku tej rodziny. W szczególności będzie istniał minimalny porządek nieprzeliczalny na prostej. Nazwijmy go μ. Nietrudno wykazać, że porządek ten jest izomorficzny z początkiem każdego porządku nieprzeliczalnego. Jak? To proste. Weźmy dowolny porządek nieprzeliczalny ρ. Skoro właściwe odcinki początkowe porządku μ są przeliczalne, to ρ nie może być izomorficzny z żadnym z nich. Wobec tego μ musi być izomorficzny z odcinkiem początkowym porządku ρ, co było do wykazania.

No dobrze, ale jak tak naprawdę „wygląda” μ? Czy da się *skonstruować* minimalny porządek nieprzeliczalny? W rozumowaniu z poprzedniego akapitu użyliśmy twierdzenia Zermeli, które równoważne jest Pewnikowi Wyboru. Jak wiadomo, rozumowania korzystające z tego ostatniego uznawane są za niekonstruktywne. Przez niektórych wręcz uznawane za niepoprawne. Spróbujmy nie używać pewnika wyboru w żadnej, nawet jego najsłabszej wersji.

Obszerną analizę matematycznych implikacji różnych słabszych odmian Pewnika Wyboru znaleźć można w P.Howard, J.Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice*, AMS, 1998.

Niech Ω_1 będzie rodziną wszystkich dobrych porządków na podzbiorach ω (zbiór liczb naturalnych: 0, 1, 2, 3, ...) i niech $\widetilde{\Omega}_1$ będzie rozbiciem Ω_1 na klasy równoważności względem relacji izomorfizmu porządków. Niech dalej, dla $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \Omega_1$ (piszemy, dla prostoty „jest początkiem” zamiast „jest izomorficzny z odcinkiem początkowym”),

$$(\star) \qquad \widetilde{A} \preccurlyeq \widetilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ jest początkiem } B \text{ dla pewnych } A \in \widetilde{A} \text{ i } B \in \widetilde{B}.$$

Oczywiście, w powyższej definicji wyrażenie „dla pewnych” można zamienić na „dla każdych”. Łatwo zauważyć, że relacja $\preccurlyeq$ jest porządkiem na $\widetilde{\Omega}_1$. Zauważmy, że to jest dobry porządek. Jeśli bowiem $\Delta \subseteq \widetilde{\Omega}_1$ jest zbiorem niepustym, a δ jest porządkiem minimalnym w rodzinie $\bigcup \Delta$, to klasa równoważności tego porządku jest elementem najmniejszym (w sensie $\preccurlyeq$) w Δ.

Symbolem $\bigcup \mathcal{A}$ oznacza się czasem *sumę* rodziny zbiorów $\mathcal{A}$, czyli ogół tych i tylko tych rzeczy, które należą do jakiegoś zbioru rodziny $\mathcal{A}$: $x \in \bigcup \mathcal{A} \iff \exists_{A \in \mathcal{A}} (x \in A)$. Istnienie takiego tworu gwarantuje tzw. *Aksjomat sumy* teorii zbiorów Zermelo-Fraenkla, którą obecnie uznaje się za podstawę (prawie) całej matematyki. Właściwie w teorii tej nie ma sensu rozróżnienie na zbiory i rodziny zbiorów, gdyż niczego innego niż zbiory w niej się nie rozważa. Innymi słowy, cokolwiek, co nie jest puste, składa się wyłącznie ze zbiorów, bo niczego innego tam nie ma.

Nietrudno się domyślić, że $\langle \widetilde{\Omega}_1, \preccurlyeq \rangle$ jest tym porządkiem, którego szukamy. Domysły domysłami – trzeba to jeszcze udowodnić. Najpierw lemat.

Lemat. Niech $\langle A, \leqslant \rangle \in \widetilde{A} \in \widetilde{\Omega}_1$. Wówczas $\widetilde{A}{\downarrow} = \left\{ \widetilde{B} \in \widetilde{\Omega}_1 : \widetilde{B} \prec \widetilde{A} \right\}$ z (odpowiednio okrojonym) porządkiem $\preccurlyeq$ jest izomorficzny z $\langle A, \leqslant \rangle$.

Dowód. Dla dowodu należy wskazać bijekcję $h : A \to \widetilde{A}{\downarrow}$ zachowującą porządek, czyli dla której

$$(\star\star) \qquad c \leqslant d \Rightarrow h(c) \preccurlyeq h(d), \quad c, d \in A.$$

Niech zatem $c \in A$. Oczywiście $\langle C, \rho_c \rangle \in \Omega_1$, gdzie $\rho_c = \left\{ \langle a, b \rangle \in A^2 : \ a \leqslant b < c \right\}$ i $C = c \downarrow = \{ d \in A : a < c \}$. Wówczas $h(c)$ definiujemy jako klasę równoważności porządku $\langle \rho_c, C \rangle$.

Warunek $(\star\star)$ spełniony jest w sposób oczywisty. Wykażemy, że h jest bijekcją.

Różnowartościowość.

Przypuśćmy, że dla pewnych różnych $c, d \in A$ zachodzi $h(c) = h(d)$. Możemy oczywiście założyć, że $c < d$. Wówczas jednak $\langle c \downarrow, \rho_c \rangle$ jest właściwym odcinkiem

* Sonovum, Lipsk, Niemcy, adam.kolany@sonovum.de

początkowym porządku $\langle d\downarrow, \rho_d\rangle$. Skoro klasy tych porządków są identyczne, oznacza to, że są one izomorficzne. Jest to jednak niemożliwe, bo żaden dobry porządek nie jest izomorficzny ze swoim właściwym odcinkiem początkowym. Uzyskana sprzeczność dowodzi różnowartościowości odwzorowania h.

Surjektywność.

Niech $\widetilde{B} \prec \widetilde{A}$ i niech $\langle B, \leqslant_B\rangle \in \widetilde{B}$. Oczywiście, możemy założyć, że B **jest** odcinkiem początkowym porządku $\langle A, \leqslant\rangle$. Bez wątpienia jest on odcinkiem właściwym. Biorąc teraz d jako najmniejszy element w A poza B, widzimy, że $\leqslant_B = \big\{\langle a, b\rangle \in A^2 :\ a \leqslant b < d\big\}$, a co za tym idzie $\widetilde{B} = h(d)$.

Z lematu tego wynika w szczególności, że właściwe odcinki początkowe porządku $\widetilde{\Omega}_1$ są przeliczalne. Ponieważ dla dowolnych dwu dobrych porządków jeden jest (izomorficzny z) odcinkiem początkowym drugiego, oznacza to, że $\widetilde{\Omega}_1$ jest odcinkiem początkowym dowolnego dobrego porządku nieprzeliczalnego.

Pozostało zatem do udowodnienia, że $\widetilde{\Omega}_1$ jest nieprzeliczalny. Ponieważ $\widetilde{\Omega}_1$ zawiera klasy wszystkich porządków skończonych, oznacza to, że jest on nieskończony. Przypuśćmy, że $\widetilde{\Omega}_1$ jest przeliczalny i niech $f : \omega \to \widetilde{\Omega}_1$ będzie bijekcją realizującą tę przeliczalność. Niech teraz $\widetilde{C}$ będzie klasą równoważności porządku $\langle \omega, \pi_f\rangle$, gdzie $\pi_f = \big\{\langle m, n\rangle \in \omega^2 :\ f(m) \preccurlyeq f(n)\big\}$. Na mocy Lematu porządek $\langle \omega, \pi_f\rangle$ jest izomorficzny z $\widetilde{C}\downarrow$ z porządkiem $\preccurlyeq$. Z drugiej strony $\langle \omega, \pi_f\rangle$ jest izomorficzny z $\langle\widetilde{\Omega}_1, \preccurlyeq\rangle$, co znaczałoby, że ten ostatni jest izomorficzny ze swoim właściwym odcinkiem początkowym $\widetilde{C}\downarrow$, co jest niemożliwe. A zatem $\widetilde{\Omega}_1$ jest nieprzeliczalny.

John von Neumann
(28.12.1903 – 8.02.1957) – inżynier chemik, fizyk, matematyk i informatyk.

Cesare Burali-Forti
(13.08.1861 – 21.01.1931) – włoski matematyk. Asystent Giuseppe Peano w latach 1894 — 1896.

Występujące w tytule ω_1 jest pierwszą nieprzeliczalną tzw. *liczbą porządkową*, czyli takim zbiorem α, który jest *przechodni* ($x \in \alpha \ \Rightarrow\ x \subset \alpha$) i *spójny* ($x, y \in \alpha, x \neq y \ \Rightarrow\ x \in y \vee y \in x$). Dowodzi się, że liczby porządkowe to zbiory przechodnie dobrze uporządkowane przez relację należenia. Przykładami liczb porządkowych są liczby naturalne (w ujęciu von Neumanna: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, etc.), całe ω, a także $\omega \cup \{\omega\}$. Ogólnie rzecz biorąc, dla liczby porządkowej α zbiór $\mathbf{S}(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ jest liczbą porządkową. Daje to nam nieskończony ciąg przeliczalnych liczb porządkowych:

$$\omega,\ \mathbf{S}(\omega)\ ,\ \mathbf{S}\big(\mathbf{S}(\omega)\big),\ \dots\ ,\ \mathbf{S}\Big(\dots \mathbf{S}\big(\mathbf{S}(\omega)\big)\dots\Big),\ \dots .$$

Okazuje się, że liczb porządkowych jest znacznie więcej: jest ich tak dużo, że nie sposób zmieścić je w jednym zbiorze. Gdyby bowiem istniał zbiór **On** wszystkich liczb porządkowych, sam byłby liczbą porządkową, a przez to swoim własnym elementem i mielibyśmy $\mathbf{On} \in \mathbf{On}$ (tzw. paradoks *Burali-Fortiego*), co nie jest możliwe. W szczególności ω_1 musi istnieć, bo gdyby wszystkie liczby porządkowe były przeliczalne, to udałoby się je „upchać” w jednym zbiorze.

Czy jednak udało nam się „zobaczyć” ω_1 ? W pewnym sensie tak. Skoro porządek $\langle\widetilde{\Omega}_1, \preccurlyeq\rangle$ jest pierwszym (z dokładnością do izomorfizmu) nieprzeliczalnym dobrym porządkiem, a ω_1 jest pierwszą nieprzeliczalną liczbą porządkową, to biorąc pod uwagę, że każdy dobry porządek jest izomorficzny z jakąś liczbą porządkową, dostajemy, że $\widetilde{\Omega}_1$ jest porządkowo izomorficzny z ω_1. Inaczej mówiąc, ω_1 „wygląda” dokładnie tak samo jak $\widetilde{\Omega}_1$, a to przecież nasz dobry znajomy.

PS. Biorąc w definicji ($\star$) zamiast ω zbiór $\widetilde{\Omega}_1$, dostalibyśmy zbiór $\widetilde{\Omega}_2$, który „wygląda” jak ω_2 – następna co do mocy po ω_1 liczba porządkowa. Potem, iterując ten proces, „zobaczymy” ω_3, ω_4, ω_5, etc.

A jak będzie wyglądało ω_ω?

A jak ω_{ω_1}?