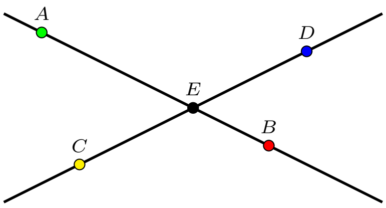
Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów

Jadwiga CZYŻEWSKA, Warszawa

Laureatka Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki Polskiego Towarzystwa Matematycznego i *Delty*.

Na drugim etapie XII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (obecnie Olimpiady Matematycznej Juniorów) pojawiło się następujące zadanie:

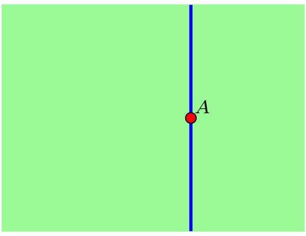
„Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij."



Odpowiedź brzmi: trzy kolory.

Udowodnijmy najpierw nie wprost, że nie możemy użyć czterech kolorów. Załóżmy, że można użyć czterech kolorów – wybierzmy zatem cztery różnokolorowe punkty. Zauważmy, że żadne trzy z nich nie są współliniowe, bo w innym przypadku znaleźlibyśmy trzykolorową prostą. Oznaczmy wybrane przez nas punkty A, B, C, D, w taki sposób, by proste AB i CD się przecinały. Ich wspólny punkt oznaczmy jako E.

Jeśli punkt E ma taki sam kolor jak punkt A czy B, to prosta CD jest trzykolorowa. W innym przypadku prosta AB jest trzykolorowa. Dowiedliśmy, że kolorując płaszczyznę przy użyciu czterech kolorów, zawsze znajdziemy trzykolorową prostą.



Teraz pokażę kolorowanie płaszczyzny trzema kolorami, spełniające warunki zadania. Pokolorujmy całą płaszczyznę jednym kolorem, np. zielonym. Wybierzmy dowolną prostą i pokolorujmy ją innym kolorem, np. niebieskim. Na prostej wybierzmy dowolny punkt i pokolorujmy go trzecim kolorem, np. czerwonym. Wtedy każda prosta jest co najwyżej dwukolorowa.

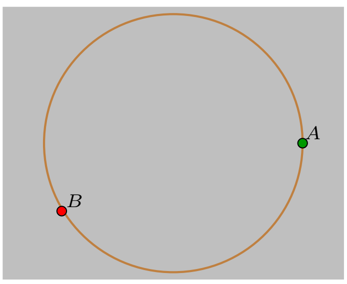
Po zawodach zadałam sobie pytanie: a jeśli każda prosta będzie co najwyżej trzykolorowa? Ilu kolorów będziemy mogli wtedy użyć do pokolorowania punktów płaszczyzny? Odpowiedź jest w tym przypadku zaskakująca: możemy użyć nieskończenie wielu kolorów!

Pokolorujmy całą płaszczyznę jednym kolorem. Wybierzmy dowolny okrąg i pokolorujmy każdy jego punkt innym kolorem. Jeśli prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem, jest jednokolorowa. Jeśli jest do niego styczna, jest dwukolorowa, a jeśli prosta przecina okrąg, jest trzykolorowa.

Możemy postawić analogiczne pytania dla okręgów: na ile kolorów możemy pokolorować punkty płaszczyzny, jeśli każdy okrąg może być co najwyżej dwu- czy trzykolorowy. Rozwiązania tych problemów są bardzo podobne do tych postawionych dla prostych, dlatego znalezienie odpowiedzi pozostawiam Czytelnikowi.

Moja praca odpowiadała na jeszcze bardziej złożone pytanie niż to postawione podczas olimpiady: na ile kolorów można pokolorować punkty płaszczyzny, jeśli każda prosta może być co najwyżej m-kolorowa, a każdy okrąg co najwyżej n-kolorowy.

W pracy udało mi się znaleźć odpowiedź dla prawie wszystkich wartości m i n. Wyjątkiem jest przypadek $m = n = 3$ — umiem wykazać, że w takim przypadku możemy użyć czterech kolorów, ale nie sześciu. Przypadek pięciu kolorów jest otwarty. W dalszej części artykułu zaprezentuję dowody dotyczące tego przypadku.



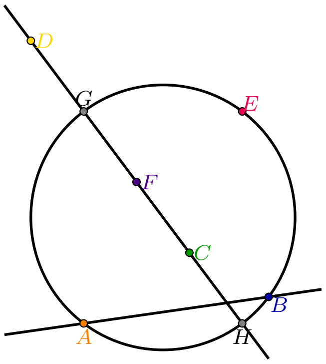
Twierdzenie: Niech k będzie maksymalną liczbą kolorów, na które możemy pokolorować punkty płaszczyzny tak, że każda prosta i każdy okrąg jest co najwyżej trzykolorowy. Wtedy $4 \leqslant k \leqslant 6$.

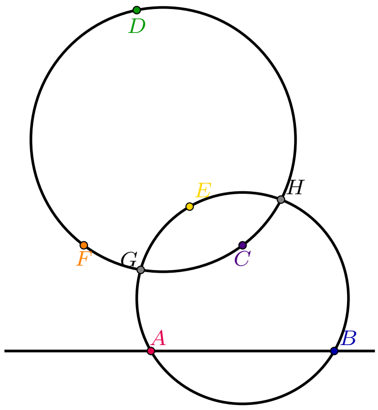
Na początku pokażę kolorowanie płaszczyzny czterema kolorami, takie, że każda prosta i każdy okrąg jest co najwyżej trzykolorowy.

Pokolorujmy całą płaszczyznę jednym kolorem, np. szarym. Wybierzemy okrąg i pokolorujmy go innym kolorem, np. brązowym. Na okręgu wybierzmy dwa punkty i pokolorujmy je na jeszcze inne kolory, np. czerwony i zielony.

Wtedy każdy okrąg i każda prosta są co najwyżej trzykolorowe. Stąd $k \geqslant 4$.

Załóżmy, że możemy pokolorować płaszczyznę sześcioma kolorami — wybierzmy sześć różnokolorowych punktów. Zauważmy, że możemy znaleźć taką prostą przechodzącą przez co najmniej dwa punkty, że pozostałe wybrane punkty będą leżeć po jednej stronie tej prostej. Z drugiej strony zauważmy, że na takiej prostej mogą leżeć





co najwyżej trzy wybrane punkty, bo w innym przypadku znaleźlibyśmy czterokolorową prostą. Rozpatrujemy zatem dwa przypadki ze względu na liczbę wybranych punktów na prostej. Poniżej przedstawię jeden z nich (rozwiązanie dla drugiego z nich jest analogiczne i pozostawiam je Czytelnikowi).

Na prostej leżą dokładnie dwa wybrane punkty — oznaczmy je jako A i B, a pozostałe jako P_1, P_2, P_3 i P_4. Spośród kątów AP_1B, AP_2B, AP_3B i AP_4B wybierzmy ten o największej mierze — AP_iB (zauważmy, że gdyby były dwa takie kąty, to znaleźlibyśmy czterokolorowy okrąg). Punkt P_i oznaczmy jako C. Spośród pozostałych kątów wybierzmy ten o minimalnej mierze — AP_jB (jest tylko jeden taki kąt z analogicznego powodu). Punkt P_j oznaczmy jako D. Pozostałe punkty oznaczmy jako E i F.
Zauważmy, że punkt C leży wewnątrz okręgu AEB. Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

- Punkty C, D i F są współliniowe. Punkty przecięcia prostej CDF z okręgiem AEB oznaczam jako G i H. Jeśli punkt G ma taki sam kolor jak punkt C, D lub F, to okrąg AEB jest czterokolorowy. W innym przypadku prosta CDF jest czterokolorowa.
- Punkty C, D, F nie są współliniowe. Punkty przecięcia okręgu CDF z okręgiem AEB oznaczam jako G i H. Jeśli punkt G ma taki sam kolor jak punkt C, D, F, to okrąg AEB jest trzykolorowy. W innym przypadku okrąg CDF jest trzykolorowy.

W każdym przypadku (także dla trzech wybranych punktów na prostej) znajdujemy czterokolorową prostą lub okrąg. Zatem nie możemy wykorzystać sześciu kolorów do pokolorowania punktów płaszczyzny w taki sposób, że każda prosta i każdy okrąg jest co najwyżej trzykolorowy. Zatem $4 \leqslant k \leqslant 6$.

Co ciekawe, w przypadku gdy kolorujemy punkty płaszczyzny z zachowaniem warunku, że każda prosta jest co najwyżej trzykolorowa, a każdy okrąg co najwyżej czterokolorowy, możemy użyć nieskończenie wielu kolorów. Aby to wykazać, potrzebujemy następującego lematu.

Lemat: Istnieje taki zbiór punktów, o nieskończonej liczbie elementów, że żadne trzy punkty należące do zbioru X nie leżą na jednej prostej i żadne cztery nie leżą na jednym okręgu.

Zdefiniujmy przez indukcję ciąg zbiorów X_1, X_2 ,…, X_n, …, które spełniają następujące warunki:

1. $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \cdots$,
2. dla każdego n żadne trzy punkty należące do zbioru X_n nie są współliniowe,
3. dla każdego n żadne cztery punkty należące do zbioru X_n nie leżą na jednym okręgu,
4. zbiór X_n zawiera $n+3$ punkty.

Zbiór X_1 zawiera wierzchołki dowolnego trójkąta i jego ortocentrum. Zauważmy, że zbiór X_1 spełnia wszystkie żądane warunki. Nowy zbiór – X_{n+1} ze zbioru X_n tworzymy w następujący sposób:

Przez każde dwa punkty zbioru X_n prowadzimy prostą, a przez każde trzy okrąg.

Niech narysowane obiekty tworzą razem zbiór Z. Zauważmy, że liczba prostych i okręgów jest skończona. Wybierzmy prostą, która nie należy do zbioru Z. Proste i okręgi przecinają ją w skończonej ilości punktów. Wybierzmy zatem punkt P, który nie leży na żadnej prostej czy okręgu należącym do zbioru Z. Wtedy $X_{n+1} = X_n + \{P\}$.

Rozważmy zbiór X, będący sumą wszystkich zbiorów X_i. Zauważmy, że zbiór X zawiera nieskończenie wiele elementów. Ponadto żadne trzy punkty należące do tego zbioru nie są współliniowe, a żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Zatem zbiór X jest szukanym przez nas zbiorem.

Jak, maając taki zbiór, możemy pokolorować płaszczyznę tak, by każda prosta była co najwyżej trzykolorowa, a każdy okrąg co najwyżej czterokolorowy? Pokolorujmy całą płaszczyznę jednym kolorem. Następnie weźmy zbiór punktów Z o nieskończonej liczbie elementów, taki, że żadne trzy punkty, które do niego należą, nie są współliniowe, żadne cztery nie leżą na jednym okręgu. Każdy punkt należący do zbioru Z pokolorujmy innym kolorem. Wtedy każda prosta będzie co najwyżej trzykolorowa, a każdy okrąg co najwyżej czterokolorowy.

Rozwinięte zadanie z Olimpiady Matematycznej Juniorów okazało się bardzo ciekawym problemem. Obecnie pracuję nad jego uogólnieniem na trójwymiarową przestrzeń.

Kończąc, chciałabym bardzo podziękować opiekunowi mojej pracy, Panu Wojciechowi Guzickiemu, za zaproponowanie mi tego tematu oraz pomoc przy tworzeniu pracy.