Kolorowa probabilistyka II

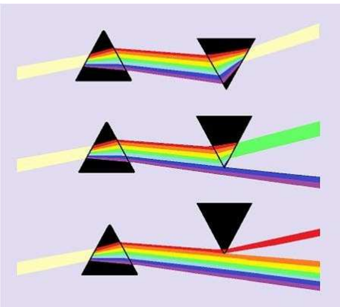
Andrzej DĄBROWSKI, Wrocław*

Wstęp

Moja przygoda ze Szkołami Matematyki Poglądowej rozpoczęła się 26 stycznia 1989 roku. Była to druga w historii Szkoła, poświęcona probabilistyce.
W czwartek, o godzinie 11:15, wygłosiłem wtedy odczyt *Kolorowa probabilistyka*. Latem 2016 roku miała miejsce Szkoła o numerze 54. Nosiła ona tytuł *Kolorowa matematyka*. Postanowiłem odkurzyć stary referat i nieco go unowocześnić (wtedy nie korzystałem zupełnie z grafiki komputerowej). Nadałem mu tytuł *Kolorowa probabilistyka II*. Ku mojemu zdumieniu, bo nie sądzę, aby organizatorzy to zaplanowali, mój odczyt wygłosiłem 27 (!) sierpnia o godzinie też 11:15. Taką klamrą zamknąłem, na szczęście nie na zawsze, moją 27–letnią wspaniałą przygodę ze Szkołami Matematyki Poglądowej.

Experimentum crucis Newtona

Angielski poeta John Keats zarzucił Newtonowi, że rozplatając tęczę, zniszczył jej poetykę, redukując ją do kolorów pryzmatu.



Rys. 1. Experimentum crucis Newtona. Image credit: Helen Klus/CC-NC-SA.

experimentum crucis – eksperyment przełomowy, wskazujący na prawdziwość teorii – tu korpuskularnej teorii światła.

Gdzieś około 1666 roku, w swoim rodzinnym domu Woolsthorpe Manor, Izaak Newton dokonał niezwykłego odkrycia. Skierował on strumień białego światła słonecznego na dwa pryzmaty ustawione w ten sposób, że po przejściu światła przez pierwszy pryzmat rozszczepiło się ono na tęczę kolorów, a ta po przejściu przez drugi pryzmat z powrotem scaliła się w strumień światła białego. Eksperyment ten obalił teorię, jaką głosił przed 400 laty Robert Bacon [1214 – 1292], że kolory są spowodowane przez strukturę szkła pryzmatu. Był również dowodem, jak twierdził Newton, na korpuskularną, a nie falową strukturę światła.

W innym eksperymencie odpowiednio ustawiony drugi pryzmat „filtrował” wybrany kolor tęczy tak, że światło po przejściu przez drugi pryzmat miało wyłącznie tę barwę. Tak uzyskane nieredukowalne barwy nazwał kolorami monochromatycznymi prostymi. Newton arbitralnie wyróżnił siedem kolorów podstawowych (czerwony, złoty (pomarańczowy), żółty, zielony, niebieski, indygo, fioletowy) w nawiązaniu do proporcji siedmiu tonów muzycznej oktawy.

Rys. 2. Kolory monochromatyczne według Newtona.

Po łacinie *spectrum* oznacza obraz, widmo, zjawę.

Mamy więc kolorów więcej niż słów w języku angielskim (ok. 1 mln słów: Quantitative Analysis of Culture Using Millions of Digitized Books, Science, Vol 331, Issue 6014,14 January 2011.

Zestaw tych siedmiu kolorów nazwał spektrum. Spektrum kolorów naprawdę jest ciągłe i praktycznie zawiera nieskończenie wiele kolorów. Oko ludzkie rozróżnia 7–10 milionów kolorów.

Idea rozkładu pewnej całości na zestaw prostszych składników (rozkład spektralny) okazała się kluczowa w wielu dziedzinach (spektroskopia, spektrometria masowa, spektrometria astronomiczna).

Pilnym czytelnikiem dzieła Newtona *Optics*, wydanego w 1704 roku, był Thomas Young [1773–1829]. Zauważył on, że wiele zjawisk tam opisanych przeczy korpuskularnej teorii głoszonej przez Newtona. Obserwując włos umieszczony w pewnej odległości od oka, oświetlony przez światło dalekiej świecy, zauważył prążki, których odległości zależały od kąta, pod którym oświetlony był włos. Young wywnioskował, że prążki powstają przez nakładanie się fal, a długość fali zależy od koloru, jaki reprezentuje. Największą długość miał kolor czerwony, a najmniejszą kolor fioletowy – dwa skrajne czyste kolory tęczy. Mieszając promieniowanie świetlne o różnych długościach fali, otrzymać można dowolny kolor, będący syntezą kolorów składowych.

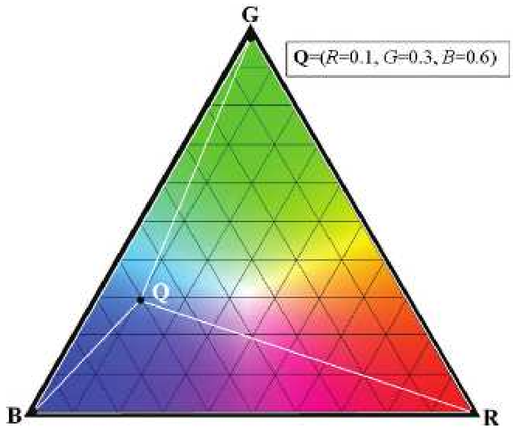
*Instytut Matematyki, Uniwersytet Wrocławski,
Andrzej.Dabrowski@math.uni.wroc.pl

Światło widzialne to część widma promieniowania elektromagnetycznego, na którą reaguje zmysł wzroku człowieka. Kolor czerwony odpowiada fali o częstotliwości $4 \cdot 10^{14}$Hz, zaś kolor fioletowy – częstotliwości $8 \cdot 10^{14}$Hz.

Iloczyn długości fali i częstotliwości jest równy prędkości światła.

W 1855 roku James Clerk Maxwell [1831–1879] wykazał, że wystarczą trzy kolory: czerwony, zielony i niebieski, aby otrzymać, przez zmieszanie w odpowiednich proporcjach, prawie każdy kolor:

Kolory RGB: Red, Green, Blue.



Rys. 3. System RGB wyznaczania współrzędnych koloru.

Metody spektralne

Światło widzialne, obserwowane w czasie, można traktować jako pole elektromagnetyczne $x(t)$ zmieniające się z wielką częstotliwością. Dla takich zjawisk fizycznych można przeprowadzić operację, podobną do rozszczepienia światła białego przez Newtona.

Energia procesu $x(t)$ wyraża się wzorem

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt.$$

Z twierdzenia Parsevala wynika, że energię można obliczyć w inny sposób:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |X(2\pi f)|^2 \, df.$$

Wyrażenie

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t) \, dt$$

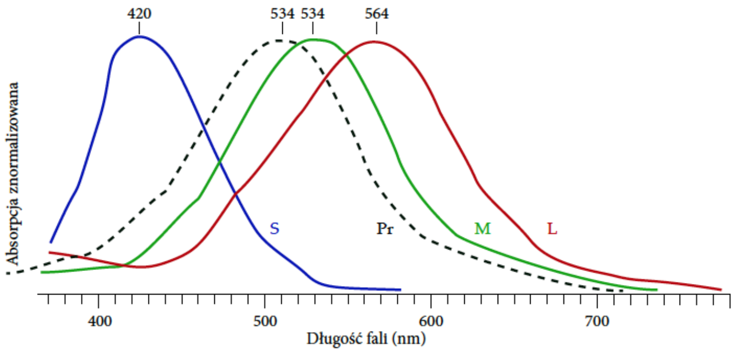
jest transformatą Fouriera procesu $x(t)$. Jeżeli czas jest wyrażony w sekundach, to częstotliwość f jest wyrażona w hercach. Parametr $\omega = 2\pi f$ nazywany jest częstotliwością kątową.

Transformata Fouriera rozwija proces $x(t)$ w bazie funkcji okresowych sinus i cosinus. $X(\omega)$ jest tą „częścią” procesu, która zależy od pojedynczej częstotliwości ω.

Twierdzenie Parsevala oznacza, że energia procesu $x(t)$ jest sumą (tak naprawdę całką) energii niesionej przez poszczególne częstotliwości. Twierdzenie Parsevala jest dla procesu $x(t)$ tym, czym było rozszczepienie światła białego przez pryzmat na kolory proste.

Wielkość $S(f) = |X(2\pi f)|^2$ nazywa się *gęstością spektralną*. Odpowiada ona energii, zawartej w procesie $x(t)$, odpowiadającej częstotliwości f.

Gęstość spektralna dla światła białego opisuje udział energii koloru odpowiadającego częstotliwosci f w fali świetlnej. Jak wiadomo, nasz zmysł wzroku reaguje na widmo, odpowiadające trzem kolorom: czerwonemu, zielonemu i niebieskiemu. Synteza koloru polega na sumowaniu sygnałów z czopków wrażliwych na te sygnały. Czopki typu Long reagują na kolor czerwony, Medium na zielony, Short na niebieski.



Rys. 4. Znormalizowany profil absorpcji różnych typów czopków (Long, Medium i Short) oraz achromatycznych pręcików (Pr). Źródło: http://www.biecek.pl/Eseje/indexObraz.html.

Kolory dźwięków

W akustyce wysokość i barwa dźwięku instrumentu muzycznego może być odczytana z gęstości spektralnej fali dźwiękowej zanotowanej dla tego instrumentu. Podobnie jak oko dokonuje analizy spektralnej, tak i ucho wewnętrzne dokonuje analizy spektralnej i drgania o określonej częstotliwości zamienia na impulsy nerwowe, dochodzące do mózgu.

Falę dźwiękową, podobnie jak falę świetlną można poddać analizie spektralnej. Porównując kształty spektrum dla fali dźwiękowej i fali świetlnej, można nadać kolor dźwiękowi.

W praktyce inżynierii dźwięków ważna jest analiza tzw. szumów losowych. Opisuje się je przez spektrum proporcjonalne do $\omega^{-\beta}$, $\beta \in [0,4]$. Dla takich szumów s-krotna kompresja czasu powoduje zmianę amplitudy, ale nie zmienia zależności między dźwiękami. Kowariancja między dźwiękami odtwarzanymi w chwilach oddalonych o sk jednostek, gdy czas jest skompresowany s-krotnie, jest $s^{\beta-1}$ razy większa niż kowariancja między dźwiękami odtwarzanymi w chwilach oddalonych o k jednostek, gdy czas nie jest skompresowany.
W praktyce oznacza to, że prędkość odtwarzania takich dźwięków nie wpływa na ich linię melodyczną, jedynie na głośność. Takie szumy mają więc własności fraktalne względem prędkości odtwarzania. Wśród szumów szczególną rolę odgrywa szum o spektrum z wykładnikiem $\beta = 1$, zwanym szumem różowym. Zmiana prędkości odtwarzania nie zmienia nie tylko linii melodycznej, ale i głośności. Inżynierowie dźwiękowi używają szumu różowego do testowania różnych urządzeń przetwarzających dźwięki.

Nie wpływa to na korelację, która jest niezależna od współczynnika skali korelowanych zmiennych.

Z tego wynika, że głos ludzki nie należy do tej kategorii – przyspieszenie odtwarzania zamienia nasz głos na głos o zupełnie innej melodyce.

Mówi się też o szumie białym, czerwonym czy niebieskim. Biały szum odpowiada dźwiękowi o stałym spektrum ($\beta = 0$), podobnie jak spektrum światła białego. Powstaje z niezależnych dźwięków o tym samym rozkładzie. Czerwony szum, nazywany też szumem Browna, ma spektrum z wykładnikiem $\beta = 2$. Czerwony szum w chwili t można otrzymać przez dodanie losowego szumu do szumu w chwili $t-1$. Jest więc sumą kolejnych dźwięków wytworzonych przez biały szum. Dźwięki czerwonego szumu są mocno skorelowane ze sobą i korelacja ta zbliża się do 1 w miarę upływu czasu. Szumy biały i czerwony są jakby na krańcach skali szumów: biały – całkowicie swobodny, nieprzewidywalny i czerwony – przewidywalny całkowicie. Szumy różowy i niebieski ze swoją strukturą zależności zajmują pozycję pośrednią, podobnie jak w układzie kolorów tęczy: szum niebieski jest dalej od czerwonego niż różowy. Szum niebieski jest więc mniej uporządkowany niż różowy.

Trajektorie szumu tworzą ruch Browna.

Melomani preferują muzykę ani zbyt przewidywalną, ani zbyt losową. Mark Kac w doskonałej autobiografii [1] cytuje Balthasara Van Der Pola, również

Fizyk i matematyk, zajmujący się m.in. radiotechniką.

melomana, który mówi o muzyce Bacha: *Jest uporządkowana, ale jednak nieprzewidywalna.* Można powiedzieć, że muzyka Bacha jest uporządkowana, bo współczynnik β w jej spektrum jest dodatni, ale nieprzewidywalna, bo $\beta < 2$. W badaniach utworów muzycznych stwierdzono, że ich spektrum jest w pobliżu różowego szumu ($\beta = 1$). [2]

Dodatkowe informacje o kolorowych szumach wraz z możliwością ich wysłuchania można znaleźć w internecie. [3]

Stacjonarne szeregi czasowe

Podobnie, jak w przypadku fal dźwiękowych, korzystając z metod spektralnych, można nadać kolorową interpretację procesom stochastycznym.

Ograniczymy się tu do procesów stacjonarnych o czasie dyskretnym – szeregów czasowych. Pozwoli to na przedstawienie interesujących nas zagadnień bez potrzeby angażowania zaawansowanych środków matematycznych.

Ciąg zmiennych losowych $\{x_n\}$ o średniej 0 jest *stacjonarnym szeregiem czasowym* (w szerszym sensie), jeśli kowariancja $Cov\,(x_n, x_m) = Ex_n x_m$ zależy tylko od różnicy $n - m$. Funkcja $\gamma_k = Cov\,(x_n, x_{n+k})$ jest *autokowariancją* szeregu $\{x_n\}$.

Niezerowy szereg czasowy to taki, że każda ze zmiennych x_n ma wariancję różną od 0.

Bezwymiarowość oznacza niezależność od jednostek pomiarowych.

Z definicji tej natychmiast wynika, że ciąg $\{\gamma_k\}$ jest dodatnio określony dla niezerowych szeregów czasowych. Łatwo też zauważyć, że ciąg $\{\gamma_k\}$ jest symetryczny: $\gamma_k = \gamma_{-k}$.

Funkcja autokorelacji szeregu stacjonarnego jest bezwymiarową wersją funkcji kowariancji. Można ją obliczyć ze wzoru

(1) $$\varrho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

Funkcja autokowariancji szeregu czasowego stacjonarnego opisuje w pełni jego zachowanie – opisuje bowiem strukturę zależności między wartościami szeregu w różnych momentach czasowych.

Gęstość spektralna stacjonarnego szeregu czasowego

Twierdzenie (Wiener, Chinczyn). Dla każdego rzeczywistego stacjonarnego szeregu czasowego istnieje na odcinku $[0, \pi]$ dystrybuanta spektralna F, niemalejąca i prawostronnie ciągła, taka, że $F\,(0) = 0$, $F\,(\pi) = \gamma_0$ spełniająca równanie

(2) $$\gamma_k = \int_0^\pi \cos\,(\omega k)\, F\,(d\omega)\,.$$

$F\,(.)$ może mieć skoki, ale zawsze da się rozłożyć na sumę

$$F\,(\omega) = F_1\,(\omega) + F_2\,(\omega)\,,$$

gdzie F_1 jest niemalejącą funkcją ciągłą, a F_2 niemalejącą funkcją schodkową. Odpowiada to rozkładowi na czysto niedeterministyczną i deterministyczną część szeregu czasowego.

Patrz mój artykuł *Determinizm osobliwością probabilisty*, zamieszczony w numerze 31 MSN.

Zachodzi to wtedy, gdy $\sum_k |\gamma_k| < \infty$.

Szereg czasowy czysto niedeterministyczny charakteryzuje gęstość spektralna f, będąca pochodną dystrybuanty spektralnej. Można ją bezpośrednio obliczyć ze wzoru

(3) $$f\,(\nu) = \frac{\gamma_0}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos\,(\omega k)\,.$$

Gęstość spektralna pozwala jednoznacznie wyznaczyć autokowariancję szeregu

$$\gamma_k = \int_0^\pi \cos\,(\omega k)\, f\,(\omega)\, d\omega.$$

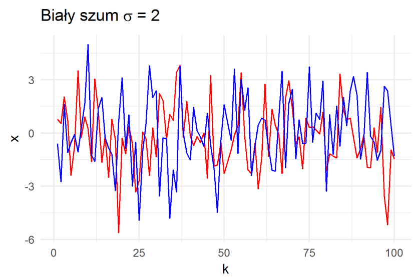
Twierdzenie Wienera–Chinczyna pozwala opisać własności szeregów czasowych w języku kolorów światła widzialnego.

Zdefiniujemy liniowe przekształcenie odcinka $[4,8] \cdot 10^{14}$Hz na odcinek $[0,\pi]$. Każdej częstotliwości $f \in [4,8] \cdot 10^{14}$Hz z zakresu światła widzialnego można przyporządkować częstotliwość $\pi\left(\frac{f}{4}10^{-14}-1\right)$ z odcinka $[0,\pi]$. W ten sposób kolorowi czerwonemu o częstotliwości $4 \cdot 10^{14}$Hz przypiszemy częstotliwość $\omega = 0$ zaś kolorowi fioletowemu o częstotliwości $8 \cdot 10^{14}$Hz częstotliwość $\omega = \pi$. Oznacza to nadanie koloru szeregowi czasowemu o znanej funkcji autokowariancji (lub autokorelacji) funkcji spektralnej, której kolorową interpretację wyznacza gęstość spektralna interpretowana jak gęstość spektralna światła widzialnego.

Możliwe jest też zadanie odwrotne: stworzyć szereg czasowy o zadanym kolorze. Znajomość funkcji spektralnej danego koloru pozwala na odtworzenie funkcji autokorelacji, a więc samego procesu.

Szeregi czasowe i ich kolory

Szereg czasowy białego koloru (biały szum)



Rys. 5. Wykres dwóch trajektorii białego szumu.

W swoim eksperymencie Newton dokonał rozszczepienia światła białego. Jego odpowiednikiem jest proces białego szumu.

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, o wartości oczekiwanej $Ex_n = 0$ i wariancji $Var\left(x_n\right) = \sigma^2$. Wtedy

$$Ex_n x_{n+k} = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases},$$

czyli jest to czysto niedeterministyczny szereg czasowy o funkcji autokorelacji $\gamma_k = \sigma^2 I_{[k=0]}$. Gęstość spektralna tego procesu jest postaci

$$f\left(\omega\right) = \frac{\sigma^2}{\pi},$$

co wynika ze wzoru (3). Jest ona stała dla wszystkich częstotliwości, co oznacza, że wszystkie częstotliwości występują z tą samą wagą w spektrum. Odpowiada to spektrum światła białego.

Szereg czasowy koloru monochromatycznego

Łatwo zbudować stacjonarny szereg czasowy o kolorze odpowiadającym częstotliwości ω_0 (*monochromatyczny szereg czasowy*).

Trajektoria takiego procesu w chwili k wyraża się wzorem $x_k = \cos\left(\omega_0 k + U\right)$, gdzie zmienna losowa U ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\pi,\pi]$.

Wszystkie trajektorie dla $\omega_0 \neq 0$ są kosinusoidami o okresie $\frac{2\pi}{\omega_0}$, przesuniętymi o losową fazę U.

Wartość oczekiwana tego szeregu wynosi 0, gdyż

$$Ex_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\omega_0 k + u\right) du = 0.$$

Kowariancja tego procesu wynosi

$$Ex_n x_{n+k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\omega_0 n + u\right)\cos\left(\omega_0(n+k) + u\right) du = \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0 k\right).$$

Jest to więc szereg czasowy stacjonarny o autokowariancji $\gamma_k = \frac{1}{2}\cos\left(\omega_0 k\right)$.

Podstawiając do wzoru (2), otrzymamy równość

$$\frac{1}{2}\cos\left(\omega_0 k\right) = \int_0^{\pi} \cos\left(\omega k\right) F\left(d\omega\right).$$

Ma on losowe trajektorie, ale gdy znana jest wartość trajektorii w jednym punkcie, to znany jest cały jej przebieg.

Stąd wynika, że $F\left(\nu\right) = \frac{1}{2} I_{[\omega \leqslant \omega_0]}$. Jest to więc szereg deterministyczny. Dystrybuanta ta odpowiada mierze skupionej w punkcie ω_0, co odpowiada czystemu kolorowi o odpowiedniej częstotliwości.

Odpowiada więc trajektorii szeregu o fazie 0.

Autokorelacja szeregu monochromatycznego jest kosinusoidą o wzorze $\varrho_k = \cos\left(\omega_0 k\right)$.

Szereg czerwony odpowiada w naszej konwencji częstotliwości $\omega_0 = 0$. Jego trajektorie są postaci $x_k = \cos(U)$, a więc są funkcjami stałymi o wartościach z przedziału $[-1, 1]$.

Szereg fioletowy odpowiada częstotliwości $\omega_0 = \pi$. Ma on trajektorie

$$x_k = \cos(\pi k + U) = (-1)^k \cos(U),$$

które są funkcjami o stałej wartości $a = \cos(U)$ dla k parzystych i $-a$ dla k nieparzystych.

Szeregi czerwony i fioletowy przedstawiają szeregi o skrajnych relacjach między kolejnymi wartościami: szereg czerwony ma stałą autokorelację równą 1, fioletowy – równą $(-1)^k$.

Patrz wzór (1).

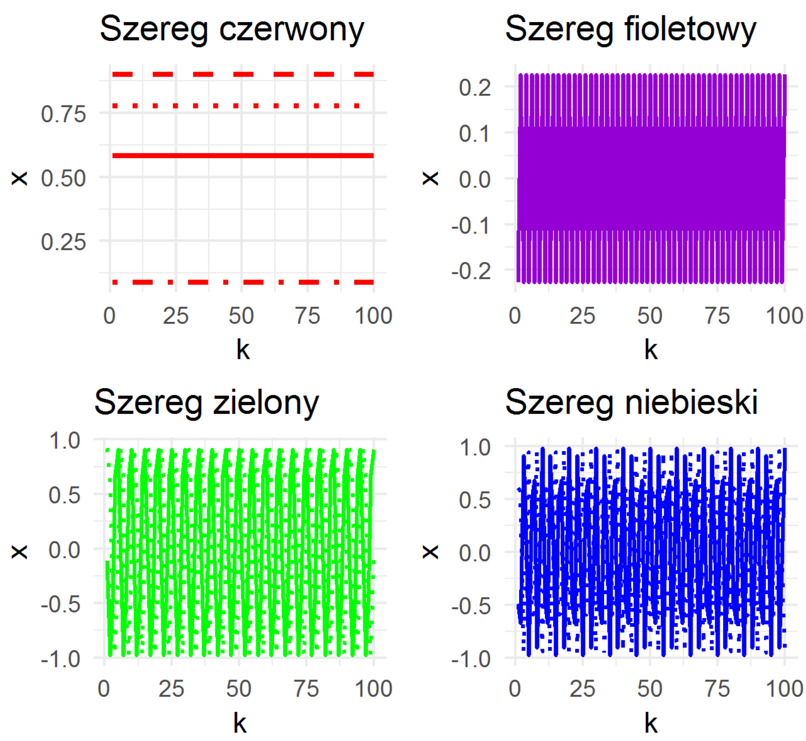
Szereg zielony odpowiada częstotliwości $\omega_0 = 0.4\pi$. Trajektorie tego szeregu są kosinusoidami o okresie 5 i losowej fazie.

Częstotliwość koloru zielonego jest równa $5.6 \cdot 10^{14}$Hz.

Szereg niebieski odpowiada częstotliwości $\omega_0 = 0.6\pi$. Trajektorie tego szeregu są kosinusoidami o okresie $\frac{10}{3}$ i losowej fazie.

Częstotliwość koloru niebieskiego jest równa $6.4 \cdot 10^{14}$Hz.

Kilka trajektorii szeregów monochromatycznych przedstawiono na wykresach.



Rys. 6. Szeregi monochromatyczne.

Szeregi czasowe o złożonych kolorach

Szeregi czasowe całkowicie niedeterministyczne mają kolory złożone. Podobnie jak to jest ze światłem widzialnym, gdzie kolory monochromatyczne zdarzają się rzadko, większość szeregów czasowych zawiera składową niedeterministyczną, a więc można je scharakteryzować poprzez kolor złożony.

Znajomość dowolnej, skończonej liczby punktów na trajektorii nie pozwala przewidzieć jej dalszego biegu.

Najprostszym takim modelem jest model średniej ruchomej rzędu 1 (model $MA(1)$). Model średniej ruchomej $MA(1)$ jest kombinacją liniową dwóch kolejnych wartości białego szumu $\{a_n\}$ o wariancji σ^2, $x_n = a_n + \theta a_{n-1}$. Parametr θ spełnia warunek $|\theta| < 1$.

Modelem $MA(1)$ opisuje się, na przykład, przyrosty notowań akcji na giełdzie.

Funkcja autokowariancji tego szeregu jest równa

(4) $\quad \gamma_0 = \sigma^2\left(1+\theta^2\right), \ \gamma_1 = \sigma^2\theta, \ \gamma_k = 0 \,\text{dla}\, k > 1$

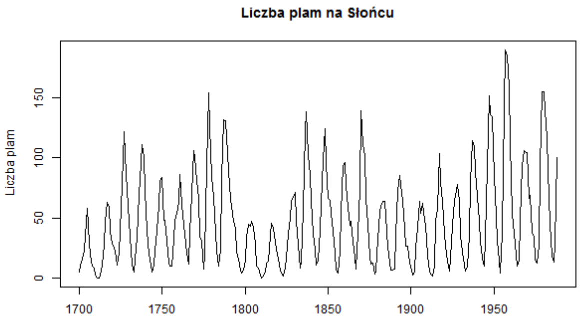
z autokorelacją

$$\varrho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \ \varrho_k = 0 \,\text{dla}\, k > 1.$$

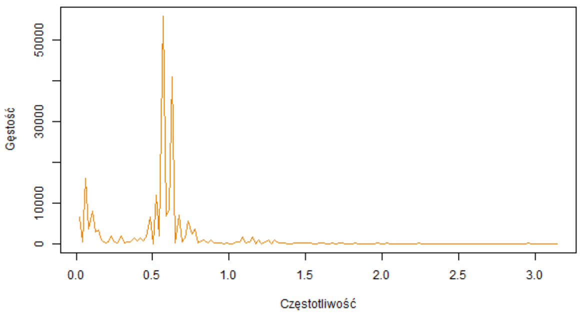
Wstawiając wartości autokowariancji (4) do wzoru (2), otrzymamy gęstość spektralną

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi}\left(1+2\theta\cos\omega+\theta^2\right).$$

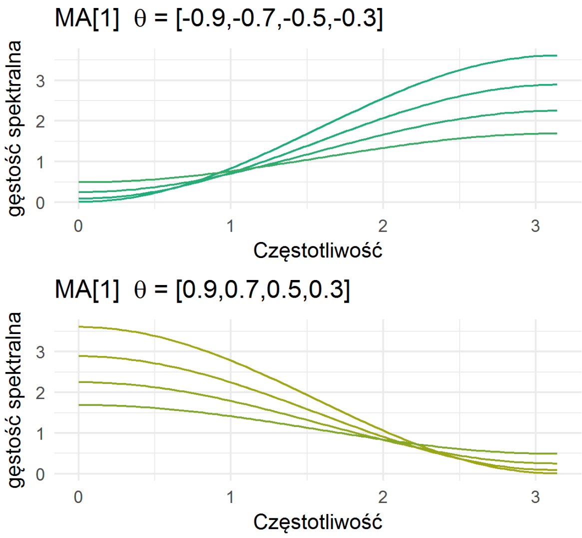
Współczynnik θ charakteryzuje zachowanie, a więc i kolor tego szeregu. Wartości θ bliskie 0 dają szereg zbliżony do białego szumu. Wartości zbliżone do 1 dają proces o autokorelacji bliskiej 1/2 z przewagą niskich częstości, a więc szereg o ciepłych kolorach. Z kolei wartości θ zbliżone do -1, tworzą szereg o autokorelacji bliskiej $-1/2$ z przewagą wysokich częstotliwości, czyli proces o kolorach zimnych.



Liczba plam na Słońcu w latach 1700–1988.



Gęstość spektralna liczby plam na Słońcu wraz z kolorem.



Gęstości spektralne dla różnych wartości θ.

Przykład szeregu czasowego rzeczywistego

Często spotykanym i komentowanym szeregiem czasowym są roczne notowania liczby plam na Słońcu w latach 1700–1988. Wykres tego szeregu sugeruje, że proces jest okresowy i zbliżony do deterministycznego.

Jeżeli obliczymy spektrum tego procesu i nadamy mu kolor, wnioski sformułowane wstępnie potwierdzają się. Ciepły, pomarańczowy kolor tego procesu wskazuje na małą zmienność, zaś maksimum w pobliżu punktu 0.6 wskazuje na okres o wartości $\frac{2\pi}{0.6} = 10.5$. Potwierdza to przyjętą w astronomii wartość okresu pojawiania się plam na Słońcu na 11 lat.

Literatura

[1] Kac, Mark, *Enigmas of Chance*, Univ. of California Press (1987), dostępna w sieci bezpłatnie pod adresem `http://www.ebookdb.org/reading/5418181E741330G818GB2469/Enigmas-Of-Chance--An-Autobiography`

[2] Schroeder, Manfred. *Fractals, Chaos, Power Laws Minutes from an Infinite Paradise*, W. H. Freeman and Company (1991)

Materiały internetowe

[3] wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Colors_of_noise`

∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗ ∼ ∗