Dlaczego pokrywy studzienek kanalizacyjnych są okrągłe?*

*Tomasz BARTNICKI, Zofia MIECHOWICZ**, Piła*

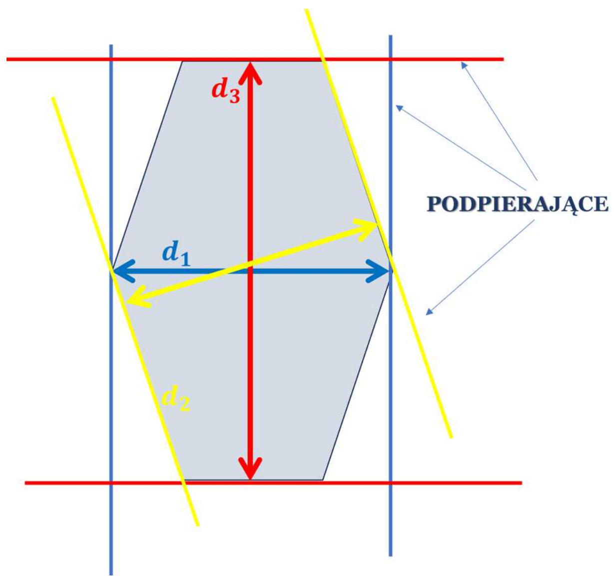
Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LXIII Szkole Matematyki Poglądowej, *Ograniczenia*, online, sierpień 2021.

Redakcja

Tytułowe pytanie usłyszeć można, podobno, na rozmowie kwalifikacyjnej, starając się o pracę w firmie Microsoft. Możliwych odpowiedzi jest wiele, a pytanie takie wydaje się być idealnym miernikiem kreatywności czy poziomu myślenia dywergencyjnego kandydata. Wskazuje również jego naturalne predyspozycje. Bo przecież zupełnie co innego odpowie na nie fizyk (łatwiej znoszą nacisk), ekonomista (są tańsze w produkcji bo mają mniejszą powierzchnię i są łatwiejsze w transporcie (?!)), inżynier (przekroje rur i tunele studni zwykle są okrągłe), robotnik (łatwo dopasowują się do otworu i można je turlać, więc łatwiej je przenieść). Matematyk zwróci z pewnością uwagę na jeszcze jeden szczegół geometryczno-praktyczny, mianowicie okrągła pokrywa nigdy nie wpadnie do otworu kanału, który wcześniej przykrywała. Nie wiemy, które z tych odpowiedzi zadowoliłyby Billa Gatesa, który w swojej firmie zatrudnia ludzi osobliwych intelektualnie, my jednak zajmiemy się w tym artykule tylko jedną z nich. Mamy zamiar, zupełnie wprost, zastanowić się nad odpowiedzią na to konkretne pytanie z punktu widzenia matematycznego. Zadamy kłam niektórym, krążącym w Internecie, absurdalnym odpowiedziom oraz zastanowimy się, czy aby na pewno koło jest optymalnym kształtem do tego rodzaju zastosowań.

Dlaczego okrągłe pokrywy nie wpadną do kanału?

Odpowiedź na pytanie dlaczego okrągłe pokrywy nie wpadną do kanału jest dość oczywista. Ponieważ koło ma stałą średnicę, to nie uda nam się znaleźć takiego miejsca ani położenia pokrywy, w którym rozmiar otworu będzie większy od jej szerokości. Łatwo sobie wyobrazić, że pokrywy kwadratowe, prostokątne, czy nawet trójkątne ktoś złośliwy mógłby (odpowiednio nimi manewrując) wrzucić do otworu kanałowego. Możemy więc powiedzieć, że zarówno otwór jak i pokrywa mają stałą szerokość. A czym jest szerokość z punktu widzenia matematycznego? Spróbujmy narysować takie dwie proste równoległe, żeby cała rozważana figura mieściła się pomiędzy nimi, przy czym każda z nich miała co najmniej jeden punkt wspólny z tą figurą. Proste takie nazywamy *podpierającymi*, a odległość między nimi to właśnie szerokość figury w kierunku wyznaczanym przez te podpierające (rysunek 1). Kiedy myślimy o jakiejś figurze, i nie jest nią koło, to przeważnie jej szerokości w różnych kierunkach są różne. Koło ma stałą szerokość, niezależnie od wyboru podpierających. Czy istnieją inne figury o stałej szerokości? A jeżeli tak, to czy nie nadawałyby się lepiej na pokrywy studzienek kanalizacyjnych? Spróbujmy to sprawdzić.



Rys. 1. Szerokość

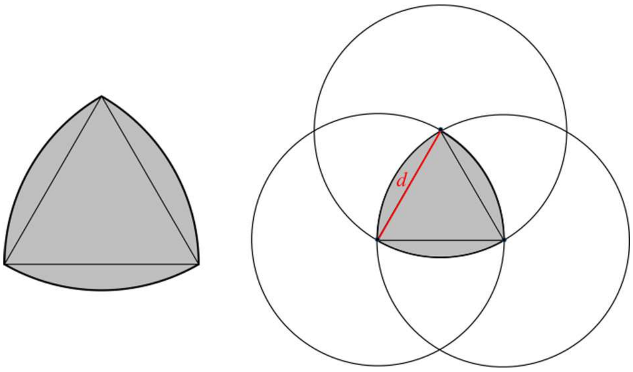
Figury o stałej szerokości

Najbardziej znaną, poza kołem, figurą o stałej szerokości jest trójkąt Reuleaux. Swoją nazwę zawdzięcza niemieckiemu inżynierowi Franzowi Reuleaux, który wykorzystywał ten kształt w swoich badaniach dotyczących mechaniki, sam trójkąt znany i wykorzystywany był jednak dużo wcześniej. Projektanci gotyckich katedr często tworzyli okna w tym kształcie, Leonardo da Vinci na jego bazie rysował swoje mapy, a Leonhard Euler, już sto lat przed Reuleaux, badał figury o podobnych własnościach. Konstrukcja takiego trójkąta jest niezwykle prosta. Powstaje on z trójkąta równobocznego poprzez zatoczenie z każdego wierzchołka

**Akademia Nauk Stosowanych w Pile,
zmiechowicz@ans.pila.pl
tbartnicki@ans.pila.pl

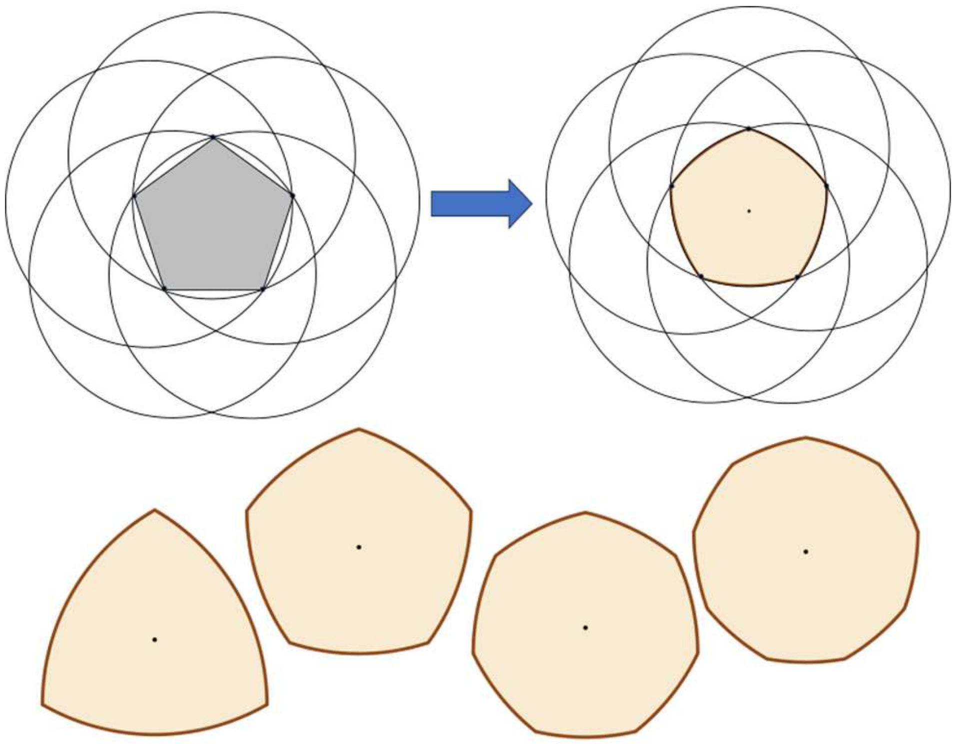
*https://doi.org/10.34739/mp.2024.09.04

łuku okręgu o promieniu równym długości jego boku. Równoważnie trójkąt Reuleaux jest częścią wspólną trzech kół o środkach w wierzchołkach trójkąta równobocznego i promieniach o długości jego boku (rysunek 2).

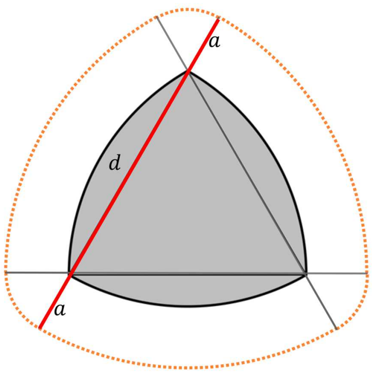


Rys. 2. Trójkąt Reuleaux

Podobnie skonstruować można figury o stałej szerokości na bazie dowolnego wielokąta foremnego o nieparzystej liczbie boków. Tak jak poprzednio, zataczamy łuk okręgu z każdego wierzchołka wielokąta, a szukana figura jest częścią wspólną wszystkich takich okręgów (rysunek 3). Takie figury nazywamy wielokątami Reuleaux.



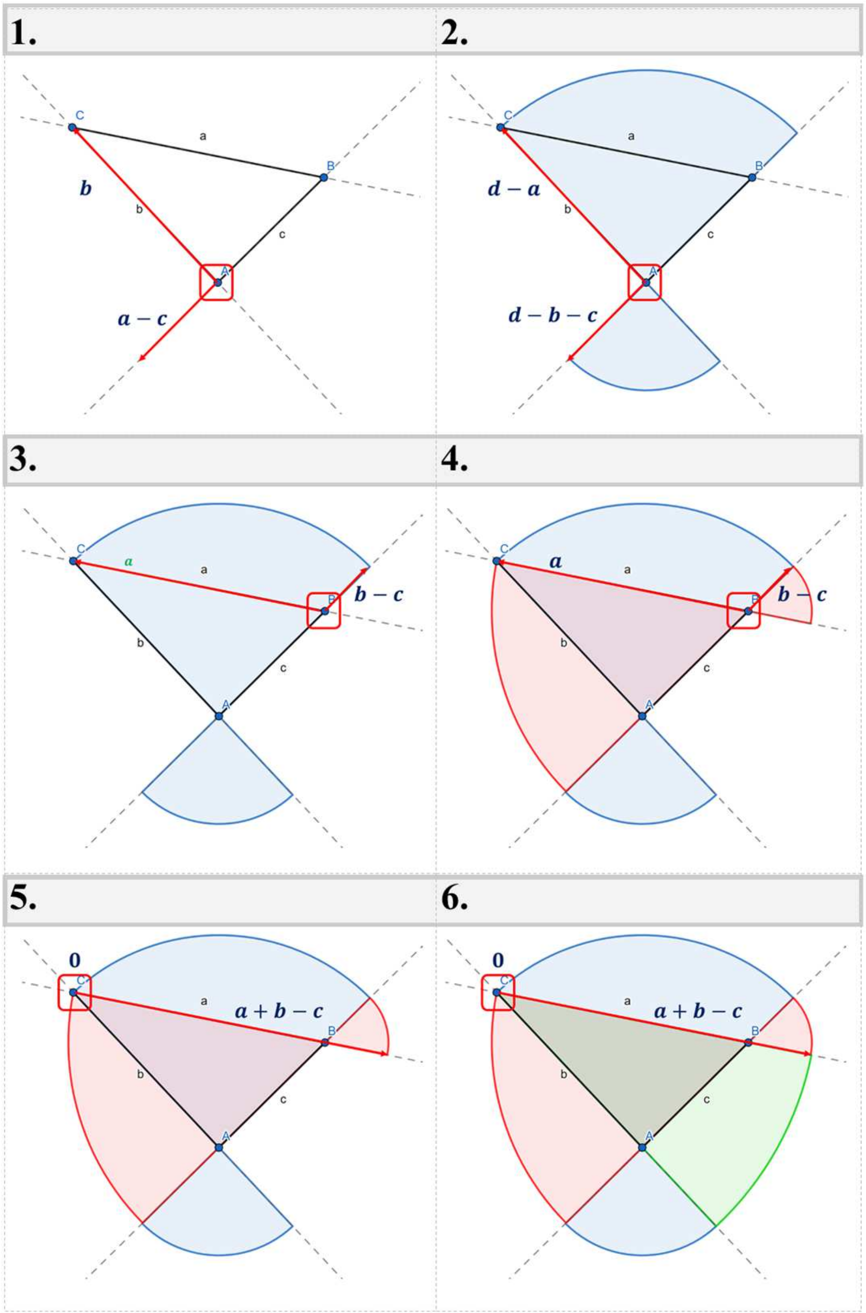
Rys. 3. Wielokąty Reuleaux



Rys. 4. Trójkąt Reuleaux i jego otoczka

Nie są to jednak jedyne figury o stałej szerokości. Łatwo jest zauważyć, że jeżeli dodamy do znanej już figury o stałej szerokości d wypukłą otoczkę o szerokości a, dostaniemy nową figurę o stałej szerokości $d + 2a$ (rysunek 4). Dzięki takiemu zabiegowi przeprowadzonemu na wielokątach Reuleaux otrzymamy figury, których brzeg jest gładki.

Figurę o stałej szerokości można zrobić również z dowolnego trójkąta.



Rys. 5. Konstrukcja figury o stałej szerokości z dowolnego trójkąta.

Konstrukcja 1. Weźmy dowolny trójkąt ABC o bokach odpowiednio a, b, c, w którym $a \geqslant b \geqslant c$.

Przedłużmy boki trójkąta trzema prostymi, odpowiednio a', b', c'. Skonstruujemy figurę o stałej szerokości $a + b - c$, kreśląc fragmenty łuków okręgów o środkach w punktach A, B, C i odpowiednio dobranych promieniach. Proste a', b', c' będą ograniczały kreślone łuki:

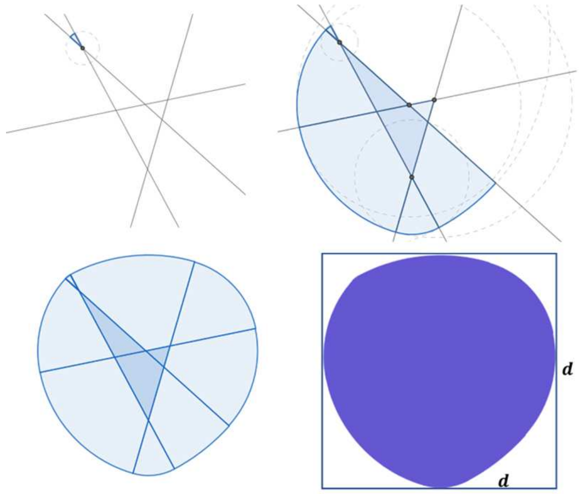
- z punktu A kreślimy łuk o promieniu b, miedzy prostymi b' i c' po stronie trójkąta oraz łuk o promieniu $a - c$ między tymi samymi prostymi po przeciwnej stronie;
- z punktu B kreślimy łuk o promieniu a, miedzy prostymi a' i c' po stronie trójkąta oraz łuk o promieniu $b - c$ między tymi samymi prostymi po przeciwnej stronie;
- z punktu C kreślimy łuk o promieniu $a + b - c$ miedzy prostymi a' i b' po stronie trójkąta.

Zauważmy, że suma mnogościowa wszystkich pięciu łuków będzie krzywą zamkniętą, która po dodaniu wnętrza utworzy żądaną figurę o stałej szerokości $a + b - c$, co kończy konstrukcję (rysunek 5).

Zauważmy, że dla przypadku $a = b = c$ konstrukcja ta jest równoważna konstrukcji trójkąta Reuleaux.

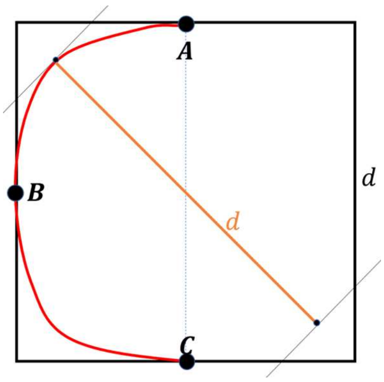
Martin Gardner podaje kilka uniwersalnych konstrukcji interesujących nas krzywych ([2]). Można, na przykład, stworzyć figurę o stałej szerokości na bazie konfiguracji wzajemnie przecinających się prostych na płaszczyźnie.

Konstrukcja 2. Niech dana będzie dowolna liczba takich prostych, że każde dwie przecinają się, natomiast żadne trzy nie spotykają się w jednym punkcie. Zacznijmy w jednym z punktów przecięcia dwóch narysowanych prostych i zatoczmy łuk okręgu (o dowolnej długości) o środku w tym punkcie, łączący ze sobą wybrane proste. Powtarzając tę procedurę dla wszystkich pozostałych punktów, kolejno, w jednym z kierunków, ale dobierając długość każdego kolejnego łuku w taki sposób, żeby łączył się z poprzednim dostaniemy figurę o stałej szerokości (patrz Rysunek 6).



Rys. 6. Konstrukcja figury o stałej szerokości metodą przecięć.

We wszystkich poprzednich konstrukcjach wykorzystywaliśmy łuki okręgów, co wydawało się dość naturalne, gdyż koło ma stałą szerokość. Okazuje się jednak, że można skonstruować figurę o stałej szerokości, której brzeg nie zawiera, żadnego łuku okręgu.

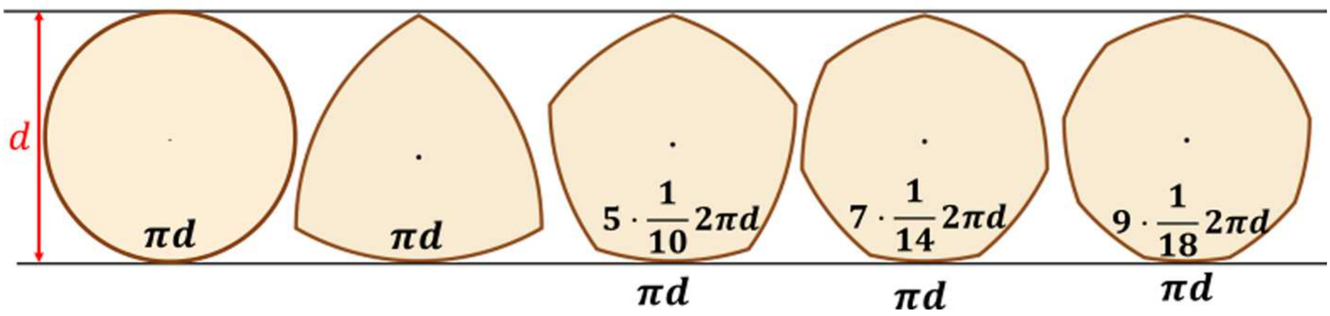


Rys. 7. Konstrukcja figury o stałej szerokości bez łuków okręgu.

Konstrukcja 3. Konstrukcję figury o stałej szerokości d przeprowadzimy wewnątrz kwadratu o boku długości d. Wystartujmy z dowolnej krzywej Γ, której krzywizna w każdym punkcie jest nie mniejsza niż krzywizna okręgu o promieniu d, odpowiednio wpisanej w połowę kwadratu. W szczególności krzywa taka jest gładka i wypukła oraz nie zawiera fragmentów prostoliniowych (rysunek 7). Krzywa Γ będzie lewą stroną brzegu figury, zaś jej prawą stronę Γ' dobudujemy według następującej procedury. W każdym punkcie krzywej Γ prowadzimy styczną, a następnie prostopadły do niej odcinek o długości d i jednym końcu w punkcie styczności. Drugie końce wszystkich takich odcinków utworzą krzywą Γ'. Krzywa $\Gamma \cup \Gamma'$ wraz ze swoim wnętrzem jest figurą o stałej szerokości d wpisaną w wyjściowy kwadrat (rysunek 7).

Obwód i pole

Dla matematyka naturalne pytanie, które nasuwa się po prześledzeniu powyższych konstrukcji, brzmi: czy istnieją jakieś uniwersalne wzory pozwalające obliczyć obwód i pole figury o stałej szerokości d. Analiza prostego przypadku wielokątów Reuleaux pozwala nam mieć nadzieję, że tak. Stosując wzór na obwód wycinka koła szybko dojdziemy do wniosku, że obwód każdego z takich wielokątów wynosi πd, gdzie d jest jego szerokością, a zatem jest równy obwodowi koła o średnicy d (rysunek 8).



Rys. 8. Obwody figur o stałej szerokości

Okazuje się, że równość obwodów wielokątów Reuleaux i obwodu koła o tej samej średnicy jest tylko szczególnym przypadkiem pewnego ogólnego twierdzenia. W 1860 roku Joseph-Émile Barbier pokazał, że prawidłowość tę można zaobserwować w dowolnych figurach o stałej szerokości!

Twierdzenie 1 (Joseph-Émile Barbier)**.** *Wszystkie figury o stałej szerokości d, mają obwód równy πd.*

Znanych jest wiele dowodów twierdzenia Barbiera. Wszystkie są niebanalne i wykorzystują zaawansowany aparat matematyczny ([3] 94-108, [4]). Nam najciekawszy wydał się ten, w którym wykorzystywane jest pojęcie *sumy Minkowskiego.* Przytoczymy poniżej jego szkic, zaznajamiając uprzednio Czytelnika z wykorzystywaną w nim operacją.

Niech X będzie zbiorem, na elementach którego określono operację dodawania. Operację tę możemy w naturalny sposób „przedłużyć” na dowolne podzbiory zbioru X. Sumą Minkowskiego zbiorów $A, B \subseteq X$ nazywamy zbiór

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Operacja sumy Minkowskiego jest więc poprawnie zdefiniowana w większości struktur algebraicznych takich jak grupy, pierścienie czy ciała. Ma ona również sens w przestrzeniach liniowych dowolnego wymiaru. Skupmy się na przypadku $X = \mathbb{R}^2$, czyli zwykłej płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych. Podzbiory tej przestrzeni traktujemy geometrycznie jako zbiory punktów (odcinki, proste, wielokąty, koła i inne figury) pamiętając jednak, że dopuszczamy operację dodawania punktów (naturalnie po współrzędnych), a co za tym idzie dopuszczamy operację sumy zbiorów w sensie Minkowskiego.

W tym przypadku pojęcie sumy Minkowskiego ma swoją prostą intuicyjną interpretację geometryczną. Weźmy dwa dowolne zbiory $P, S \subseteq \mathbb{R}^2$ i wyznaczmy ich sumę $P + S \subseteq \mathbb{R}^2$. Zbiór P nazwijmy pędzlem, zaś zbiór S szablonem. Do pędzla P „przymocowujemy sztywno” rękojeść, której koniec osadzamy w punkcie $(0, 0)$. Zbiór P zamaczamy w farbie, a następnie przesuwamy (bez obracania) koniec rękojeści po wszystkich punktach szablonu S i obserwujemy figurę, którą namalował na płaszczyźnie pędzel P. Zbiór wszystkich punktów tej figury jest właśnie sumą Minkowskigo $P + S$. Zauważmy, że operacja $P + S$ jest przemienna, więc pędzel i szablon mogły być zdefiniowane zamiennie.

Poniżej przedstawiamy (bez dowodów) kilka własności sumy Minkowskiego.

Obserwacja 1. *Kształt i rozmiar sumy nie zależą od położenia składników.*

Obserwacja 2. *Suma dwóch figur wypukłych jest wypukła.*

Obserwacja 3. *Szerokość sumy jest równa sumie szerokości składników (w dowolnym kierunku).*

Obserwacja 4. *Obwód sumy jest równy sumie obwodów składników.*

Obserwacja 5. *Suma figury i jej obrazu w symetrii środkowej również posiada środek symetrii.*

Obserwacja 6. *Koło jest jedyną środkowosymetryczną figurą o stałej szerokości.*

Znając pojęcie sumy Minkowskiego oraz jej własności, wymienione powyżej, możemy dowód twierdzenia Barbiera zawrzeć w zaledwie kilku linijkach.

Twierdzenie 2 (Joseph-Émile Barbier)**.** *Wszystkie figury o stałej szerokości d, mają obwód równy πd.*

Dowód. Niech K będzie dowolną figurą o stałej szerokości d, zaś K' jej obrazem w dowolnej symetrii środkowej. Suma Minkowskiego $K + K'$ jest figurą środkowosymetryczną o stałej szerokości $2d$ (obserwacje 3 i 5). Z obserwacji 6 wynika, że $K + K'$ musi być kołem o średnicy $2d$ i obwodzie $2\pi d$. Dodając do tego obserwację 4 dostajemy równość

$$\mathrm{obw}(K) + \mathrm{obw}(K') = \mathrm{obw}(K + K').$$

Ponieważ obwody figur K i K' są równe, to

$$2\mathrm{obw}(K) = 2\pi d,$$

więc (wobec dowolności wyboru figury K) $\mathrm{obw}(K) = \pi d$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 3. *Spośród wszystkich figur o stałej szerokości d największe pole ma koło.*

Wiemy już z twierdzenia Barbiera, że wszystkie figury o stałej szerokości d mają ten sam obwód równy πd. Już od czasów starożytnych wiadomo było, że wśród figur płaskich o danym obwodzie największe pole ma koło. Wiedzę tę przez wieki wykorzystywano w teorii i w praktyce, choć jej formalne, precyzyjne uzasadnienie nie zostało podane. Dopiero w roku 1697 Jacob Bernoulli rozwiązał ten problem w ogólniejszym przypadku, a w roku 1863 Jacob Steiner podał pięć dowodów następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4 (Podstawowe twierdzenie izoperymetryczne)**.** *Wśród wszystkich krzywych izoperymetrycznych (o ustalonym obwodzie) na płaszczyźnie, figurę o największym polu ogranicza okrąg.*

Wydawać by się mogło, że znany od starożytności problem został ostatecznie rozwiązany. Okazuje się jednak, że w twierdzeniu 4 jest pewien drobny niuans, który wymaga omówienia. Otóż wszelkie rozumowania uzasadniające prawdziwość twierdzenia izoperymetrycznego, począwszy od starożytności (Zenodor), a skończywszy na dowodach Steinera, opierały się na „cichym" założeniu, że wśród figur o ustalonym obwodzie **istnieje** figura o największym polu. Z pewnością nikt (od Zenodora do Steinera) nie wątpił w istnienie takiej figury, lecz przez dwa tysiąclecia żaden matematyk nie zająknął się słowem o konieczności podania dowodu jej istnienia. Nawet współcześnie, gdy wspominamy o tym problemie jako klasyce geometrii, nie pochylamy się zbytnio nad jego egzystencjalnością. Niemniej jednak, z matematycznego punktu widzenia, uzadnienie istnienia rozwiązania jest konieczne. Jako pierwszy podał je Edler 1882 roku. Co ciekawe, jego pomysł jest oparty na elementarnych rozważaniach geometrycznych, które same w sobie są interesującymi zagadnieniami izoperymetrycznymi (patrz [3] 126-141). Większość późniejszych dowodów wykorzystuje już pewne zaawansowane twierdzenia graniczne.

Jaka jest figura o najmniejszym polu spośród figur o zadanej stałej szerokości d? Jeżeli weźmiemy pod uwagę figury zbudowane na bazie wielokątów foremnych to najmniejsze pole spośród nich ma, oczywiście, trójkąt Reuleaux. Analogicznie jak wśród wielokątów foremnych wpisanych w koło ich pole rośnie wraz ze wzrostem liczby boków. Poznaliśmy wiele innych konstrukcji figur o stałej szerokości, czy zatem wśród nich nie znajdzie się żadna o mniejszym polu? Fakt, że taka figura nie istnieje udowodnili, niezależnie, Henri Lebesgue w roku 1914 ([5]) i Wilhelm Blaschke w roku 1915 ([1]) .

Twierdzenie 5 (Blaschke-Lebesgue)**.** *Spośród wszystkich figur o stałej szerokości d najmniejsze pole ma trójkąt Reuleaux.*

Pola ekstremalnych figur o szerokości d, o których mówią twierdzenia 3 i 5, wynoszą odpowiednio

$$\frac{\pi}{4}d^2 \approx 0,7854d^2$$

dla koła oraz

$$\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}d^2 \approx 0,7048d^2$$

dla trójkąta Reuleaux.

W prawdziwym świecie

Silnik Wankla

Figury o stałej szerokości mają własności, które pozwalają wykorzystywać je do rozwiązywania problemów o charakterze mechanicznym. Franz Reuleaux, któremu zawdzięczamy nazwę najpopularniejszych (poza kołem) figur o stałej szerokości, był inżynierem i teoretykiem budowy maszyn, nic więc dziwnego, że studiował głównie ich mechaniczne własności. To właśnie jego prace były przyczynkiem do późniejszej spektakularnej kariery trójkąta Reuleaux jako elementu budowy nowego rodzaju silnika spalinowego, wymyślonego i skonstruowanego przez Felixa Wankla w latach trzydziestych XX wieku.

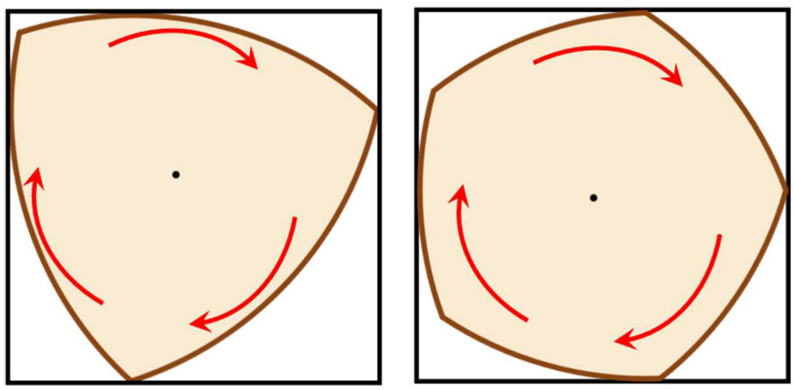
Wankel wpadł na pomysł, aby poruszający się tłok (w klasycznym silniku) zastąpić obracającym się rotorem (tzw. silnik rotacyjny) umieszczonym bezpośrednio w komorze spalania. Idealnym kształtem dla rotora w tej konstrukcji okazał się właśnie trójkąt Reuleux.

Przed i w trakcie Drugiej Wojny Światowej pomysły i patenty Wankla wykorzystywane były wyłącznie w niemieckim przemyśle zbrojeniowym i dopiero po wojnie mogły trafić do przemysłu cywilnego. Silnika tego w seryjnej produkcji po raz pierwszy użyła firma NSU w samochodach Spider (lata 1964–67). Po zaprzestaniu produkcji licencję odkupiła japońska firmy Mazda, która wykorzystywała go nieprzerwanie aż do 2012 roku, kiedy to zszedł z taśmy ostatni egzemplarz modelu RX-8 z silnikiem Wankla. Firma nie zaprzestała jednak prac nad udoskonalaniem technologii silnika rotacyjnego i na początku 2023 roku świat motoryzacji obiegła sensacyjna wiadomość, że powraca on w hybrydowym modelu MX-30 R-EV jako silnik pomocniczy dla głównej jednostki elektrycznej. Co więcej, Mazda szumnie zapowiada, że kolejnym jej krokiem będzie samochód sportowy z silnikiem Wankla jako jednostką podstawową.

Podobnej technologii używa również szwajcarska firma Mistral zajmująca się produkcją silników lotniczych.

Kwadratowe dziury

Czy istnieje wiertło, które wywierci kwadratowe dziury? Nasza intuicja podpowiada nam, że jeżeli wiertło porusza się ruchem obrotowym, to uzyskana figura będzie miała kształt, który możemy uzyskać w wyniku obrotu. Kwadrat z pewnością taką figurą nie jest. Intuicyjnie skłaniamy się więc ku odpowiedzi „nie” na postawione wyżej pytanie. A jeżeli nawet wiertło takie istnieje, to chyba powinno mieć jakiś szczególnie skomplikowany kształt? Nic bardziej mylnego. Nie dość, że wiertła takie istnieją i są stosowane w praktyce, to ich kształt bazuje na bardzo prostej figurze geometrycznej, jaką jest trójkąt Reuleaux. Na pomysł ten wpadł ponad sto lat temu Anglik Harry Watts, który opatentował go już w 1914 roku (wynalazł on również wiertła, które pozwalają wiercić dziury w kształcie innych wielokątów foremnych). Wiercenie kwadratowych dziur przy pomocy figur o stałej szerokości jest możliwe, ponieważ obracają się one „bez luzu” w kwadracie o boku równym ich szerokości (rysunek 9). Jedynym mankamentem takiego wiertła jest fakt, że narożniki dziury wywierconej przy jego użyciu będą nieco zaokrąglone. Wystarczy jednak drobna modyfikacja kształtu jego końcówki, żeby poradzić sobie z tym problemem.



Rys. 9. Obroty w kwadracie

Dookoła nas

Wystarczy dobrze rozejrzeć się dookoła, żeby odnaleźć przykłady figur o stałej szerokości. Najczęściej w prawdziwym świecie spotkamy trójkąt Reuleaux. Taki kształt mają często przekroje kredek i ołówków. Ponieważ przybory do pisania chwytamy zwykle przy użyciu trzech palców, to kształt ten wydaje się być najbardziej ergonomiczny. Zdarza się również gitarowy plektron w interesującym nas kształcie.

I wiele innych przykładów:

- monety, na przykład 20 i 50 pensów brytyjskich mają kształt siedmiokąta Reuleaux; Ma to uzasadnienie czysto techniczne, gdyż automaty wrzutowe rozpoznają monety, nie tylko po ciężarze, ale również po średnicy, więc, jeśli nie jest ona kołem, to powinna mieć przynajmniej stałą szerokość.
- w swoich mapach Leonardo da Vinci wykorzystywał trójkąty Reuleaux;
- rowery, których „koła” są wielokątami Reuleaux; Jazda na takim rowerze może być niekomfortowa, gdyż „koła” obracają się mimośrodowo (nie mają środka obrotu, patrz obserwacja 6) więc w trakcie jazdy cała konstrukcja porusza się również w pionie.
- okna niektórych gotyckich katedr mają kształt trójkąta Reuleaux;
- nowoczesne budynki (drapacze chmur), na przykład Köln Triangle (29 pięter, 103 metry wysokości);
- sztuka użytkowa, biżuteria, ozdoby, wyposażenie wnętrz.

Zamiast zakończenia

Drogi Czytelniku, czy artykuł ten dał Ci odpowiedź (lub przynajmniej do niej przybliżył) na postawione w tytule pytanie? Jeżeli nie, to znaczy, że cel jaki sobie postawiliśmy przed jego napisaniem, a wcześniej przed przygotowaniem referatu na SMP, został (przynajmniej po części) osiągnięty.

Rys. 10. Ale kanał!

Zależało nam bowiem, aby zasiać w Twoim umyśle choć cień wątpliwości, co do powtarzanej od wieków tezy, że koło jest w geometrii i w przyrodzie figurą wyjątkową, daną nam od Boga i posiadającą cechy niemal nadprzyrodzone. Skupiliśmy się tylko na jednej z jego „cudownych” własności – stałej szerokości w dowolnym kierunku. Pokazaliśmy, że koło jest tylko jedną z nieskończenie wielu figur, które ją posiadają.

Na sam koniec zostawiliśmy pewną niespodziankę, która jednak nawiązuje w pewien sposób do tytułowego pytania. Natknęliśmy się na nią zupełnie przypadkiem, przeszukując Internet pod kątem ciekawostek dotyczących figur o stałej szerokości. Zdjęcie poniższe przedstawia pokrywę studzienki kanalizacyjnej o znajomym kształcie (rysunek 10, [6]). A więc jednak, nie tylko koło!

Literatura

[1] W. Blaschke, *Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts*, Mathematische Annalen, (1915)
[2] M. Gardner, *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, The University of Chicago Press, (1991)
[3] J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, (2009)
[4] M. Wróbel, *Jak matematyk rzuca igłą?*, Delta, 2, (2011)
[5] H. Lebesgue, *Sur le probleme des isopérimetres et sur les domaines de largeur constante*, Bulletin de la Société Mathématique de France, (1914)
[6] http://mathtourist.blogspot.com/2016/09/reuleaux-triangle-on-street.html