O ciągach rozmieszczonych równomiernie*

*Adam GREGOSIEWICZ**, Lublin*

Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LXV Szkole Matematyki Poglądowej, *Uogólnienia*, Siedlce, sierpień 2022.

Redakcja

Wyznaczanie granic ciągów liczbowych wydaje się, przynajmniej na początku, zajęciem dość prozaicznym. Poznajemy pewną grupę reguł, które w rozmaitych sytuacjach pozwalają niemal algorytmicznie znaleźć wartość poszukiwanej granicy, bądź stwierdzić, że ciąg jest rozbieżny i granicy nie posiada. W tej ostatniej sytuacji wskazujemy zwykle dwa podciągi, które są zbieżne do dwóch różnych wartości. Badanie podciągów jest w zasadzie metodą uniwersalną, gdyż nietrudno uzasadnić, że ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego podciągi są zbieżne do tej samej granicy.

Bywa jednak i tak, że ciąg zdaje się być rozbieżny, ale wskazanie odpowiednich podciągów nastręcza trudności. Tę sytuacje dobrze obrazuje przykład ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wiemy, a raczej „wiemy”, że jest on rozbieżny. Jakie więc powinniśmy wybrać podciągi, aby to ściśle uzasadnić? Nie jest to zupełnie oczywiste. Być może istnieje jakaś niespodziewana zależność między liczbami naturalnymi a liczbą π, co powoduje, że „n modulo 2π” ma granicę przy $n \to +\infty$ i ciąg $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny.

Warto może podkreślić, że nieistnienie granicy *funkcji* $x \mapsto \sin x$ przy x dążącym do $+\infty$, nie implikuje nieistnienia granicy naszego ciągu.

Na szczęście nasza intuicja działa w tym przypadku dobrze. Pokażemy, że ciąg $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rzeczywiście rozbieżny. W przeciwnym razie mielibyśmy

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\sin(n+2)-\sin n\big)=0,$$

ponieważ $(\sin(n+2))_{n\in\mathbb{N}}$ jest podciągiem ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jednak

$$\sin(n+2)-\sin n = 2\sin(1)\cos(n+1),$$

więc ciąg $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ dążyłby do zera, a ponieważ

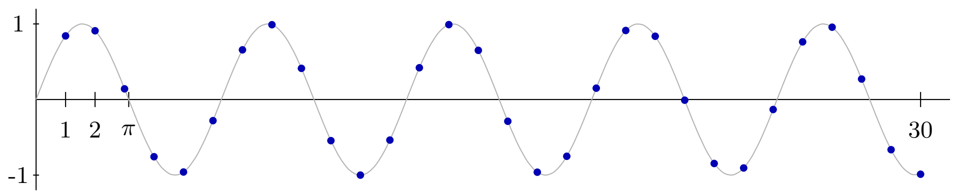
$$\cos(n+2)-\cos n = -2\sin(1)\sin(n+1),$$

to również ciąg $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ dążyłby do zera. Prowadzi to jednak do sprzeczności, gdyż ciąg $(\sin^2 n+\cos^2 n)_{n\in\mathbb{N}}$, stale równy jeden, miałby granicę równą zero.

Przeprowadzone rozumowanie jest niekonstruktywne — nie wynika z niego, jak wybrać dwa podciągi ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$, które mają różne granice.

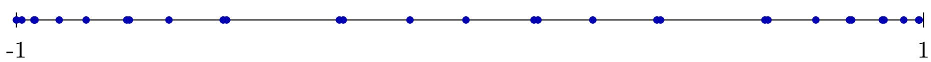
Gęste zbiory wartości

W kontekście omówionego przykładu zastanówmy się, ile różnych granic posiadają podciągi ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zacznijmy od rysunku. Początkowe wyrazy układają się następująco.



Rys. 1: Wykres funkcji sinus z zaznaczonymi wartościami $\sin n$ dla $n = 1,\dots,30$.

Trochę więcej można zaobserwować po zrzutowaniu punktów na oś Oy.

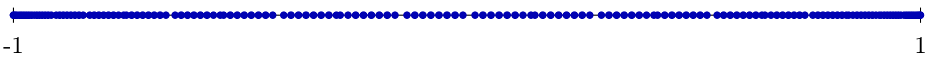


Rys. 2: Elementy zbioru $\{\sin n\colon n = 1,\dots,30\}$.

**Politechnika Lubelska,
a.gregosiewicz@pollub.pl

*https://doi.org/10.34739/mp.2024.09.01

Mimo niewielkiej próbki, widać charakterystyczne skupianie się punktów w okolicach wartości 1 i -1. Jeszcze wyraźniej można to dostrzec, jeśli zwiększymy liczbę punktów, na przykład do 300.



Rys. 3: Elementy zbioru $\{\sin n\colon n = 1, \ldots, 300\}$.

W okolicach wartości skrajnych wyrazy ciągu są ułożone gęściej niż w środku. Ponadto, okresowość funkcji sinus powinna powodować, że opisane zachowanie nie zależy od tego, na który fragment ciągu patrzymy. Zaznaczmy jego wyrazy od $n = 10001$ do $n = 10300$.

Rys. 4: Elementy zbioru $\{\sin n\colon n = 10001, \ldots, 10300\}$.

Rozmieszczenie wartości jest oczywiście inne, ale natura wykresu pozostaje podobna. Jednocześnie wydaje się, że wraz ze wzrostem liczby punktów luki między sąsiednimi punktami będą coraz mniejsze. Chcemy przez to powiedzieć, że w każdym niepustym przedziale zawartym w $[-1, 1]$ znajdą się wyrazy omawianego ciągu. Własność tę formalnie nazywamy *gęstością*.

Zbiór $X \subset \mathbb{R}$ jest *gęsty*, jeżeli dla dowolnych $\epsilon > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ istnieje takie $y \in X$, że $|x - y| < \epsilon$.

Twierdzenie. *Zbiór* $\{\sin n\colon n \in \mathbb{N}\}$ *jest gęsty w przedziale* $[-1, 1]$.

Idea dowodu jest dość prosta. Dla dowolnego $a \in [-1, 1]$ istnieje takie $b \in \mathbb{R}$, że $a = \sin b$, więc wystarczy znaleźć $n \in \mathbb{N}$, dla którego $\sin n$ jest bliskie $\sin b$. W tym celu pokażemy, że w dowolnie małym otoczeniu b znajduje się liczba postaci postaci $n - 2k\pi$ dla pewnych $n, k \in \mathbb{N}$.

Dowód. Rozważmy ciąg $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ części ułamkowych ciągu $(2k\pi)_{k\in\mathbb{N}}$, to znaczy $a_k = \{2k\pi\}$. Wszystkie wyrazy a_k leżą w przedziale $[0, 1]$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wiemy, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ pewne dwa wyrazy leżą w odległości mniejszej niż N^{-1}. Innymi słowy, istnieją liczby naturalne i, j, dla których $i < j$ oraz $\delta \coloneqq a_i - a_j$ spełnia warunek $|\delta| < N^{-1}$. Ponadto,

Przyjmujemy tutaj oznaczenie

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ jest *podłogą* z x, czyli największą liczbą całkowitą, która nie przekracza x.

$$\delta = 2i\pi - \lfloor 2i\pi \rfloor - 2j\pi + \lfloor 2j\pi \rfloor = \lfloor 2j\pi \rfloor - \lfloor 2i\pi \rfloor - 2(j - i)\pi,$$

więc $\delta \neq 0$ ze względu na niewymierność liczby π. Widzimy jednocześnie, że δ jest postaci $n - 2k\pi$ dla $n = \lfloor 2j\pi \rfloor - \lfloor 2i\pi \rfloor$, $k = j - i$.

Znajdziemy teraz wielokrotność δ leżącą blisko b. Załóżmy najpierw, że $b \geqslant 0$ i dobierzmy liczby $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b' \in [0, N^{-1})$ w ten sposób, że $b = N^{-1}m + b'$. Jeżeli $\delta > 0$, to istnieje $m' \in \mathbb{N}$, dla którego

Wielokrotność ta jest ciągle żądanej postaci $n - 2k\pi$.

$$N^{-1}m < m'\delta < N^{-1}(m + 1),$$

co gwarantuje, że $|b - m'\delta| < N^{-1}$. W przypadku, gdy $\delta < 0$, wystarczy znaleźć takie $m' \in \mathbb{N}$, że $0 < m'\delta + 1 < N^{-1}$ i postąpić jak wyżej dla $m'\delta + 1$ zamiast δ.

W przypadku, gdy $b < 0$, dowód jest w zasadzie identyczny, przy czym dla $\delta > 0$ należy postępować jak wcześniej dla $\delta < 0$ i odwrotnie. $\square$

W dowodzie twierdzenia kluczową rolę odegrały dwa spostrzeżenia. Po pierwsze, dzięki okresowości funkcji sinus, mogliśmy aproksymować b nie przez n, co oczywiście by się nie udało, a przez liczby postaci $n - 2k\pi$, dzięki czemu uzyskaliśmy dodatkową swobodę. Po drugie, niewymierność liczby π zagwarantowała, że δ jest różna od zera, co pozwoliło znaleźć liczbę omawianej postaci w pobliżu b.

Wykazaliśmy zatem przy okazji ciekawą rzecz — zbiór liczb $\{n - 2k\pi\colon n, k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$. Równoważnie, zbiór części ułamkowych $\{\{2k\pi\} : k \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w przedziale $[0, 1]$. W dowodzie ostatniej własności nie wykorzystaliśmy żadnych szczególnych własności liczby π, a jedynie jej niewymierność. Uzyskaliśmy więc w istocie ogólniejszy wynik, zwykle nazywany *lematem Kroneckera.*

Leopold Kronecker (1823-1891).

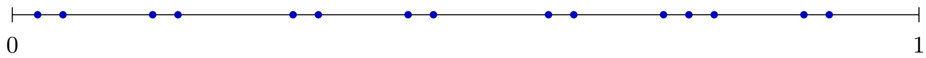
Lemat Kroneckera (1884 r.)**.** *Zbiór części ułamkowych*

$$\{\{n\alpha\}\colon n \in \mathbb{N}\}$$

jest gęsty w przedziale $[0,1]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* α *jest liczbą niewymierną.*

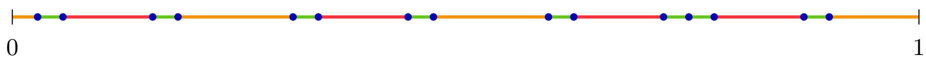
Trzy długości

Warto zauważyć jeszcze jedną interesującą cechę ciągu części ułamkowych liczb postaci $n\alpha$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy $\alpha = \mathrm{e}$ i narysujmy 15 początkowych wyrazów ciągu $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$.

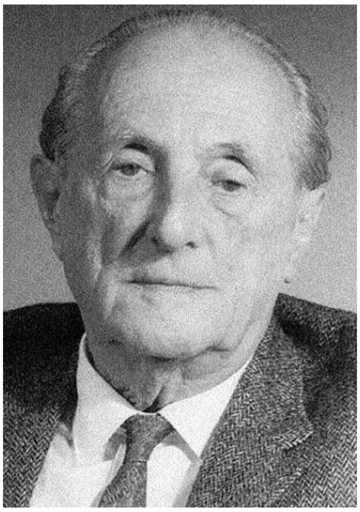


Rys. 5: Zbiór $\{\{n\mathrm{e}\}\colon n = 1, \ldots, 15\}$.

Natychmiast rzuca się w oczy pewna regularność. Wydaje się, że odcinki łączące sąsiednie punkty (łączymy też punkt ostatni z pierwszym) mają tylko trzy różne długości.



Rys. 6: Odcinki równej długości zaznaczono tym samym kolorem.



Hugo Steinhaus (1887-1972).

Hugo Steinhaus postawił hipotezę, że tak będzie zawsze. Dla dowolnej liczby niewymiernej α oraz dowolnie dużego $N \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$\{\{n\alpha\}\colon n = 1, \ldots, N\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\},$$

przy czym $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_N < 1$. Uporządkowany w ten sposób zbiór punktów tworzy naturalny podział odcinka $[0,1]$. Steinhaus sądził, że zbiór długości odcinków tego podziału, to znaczy zbiór różnic

$$A = \{\alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \ldots, \alpha_N - \alpha_{N-1}, 1 - (\alpha_N - \alpha_1)\}$$

ma co najwyżej trzy elementy. Przypuszczenie to okazało się prawdziwe.

Twierdzenie o trzech długościach (ang. *Three-gap theorem*)**.** *Dla dowolnej liczby niewymiernej* α *i dowolnego* $n \in \mathbb{N}$ *zbiór* A *ma co najwyżej trzy elementy.*

Jako pierwsi twierdzenie udowodnili niezależnie w latach 50. XX w. Vera Sós, János Surányi i Stanisław Świerczkowski. Znamy dzisiaj wiele dowodów tego twierdzenia, a poniższy, elegancki i czysto kombinatoryczny, pochodzi od Franka Lianga.

Pamiętajmy, że a_i nie musi być mniejsze niż a_j, gdyż może się zdarzyć, że $a_i = \alpha_N$ i $a_j = a_1$.

Dowód. Wyobraźmy sobie, że punkty $a_n = \{n\alpha\}$ umieszczamy w przedziale $[0,1]$ po kolei od $n = 1$ do $n = N$. Niech B będzie odcinkiem podziału, który, wśród wszystkich odcinków tej samej długości, powstał jako ostatni. Przypuśćmy, że lewym końcem odcinka B jest punkt a_i, a prawym a_j. Wiemy zatem, że odcinek o lewym końcu $\{(i+1)\alpha\}$ i prawym końcu $\{(j+1)\alpha\}$, który dla prostoty oznaczmy przez $B + \alpha$, nie jest odcinkiem podziału, ponieważ ma taką samą długość jak B. Musi więc zachodzić jedna z trzech możliwości: 1) $i = N$, 2) $j = N$, lub 3) we wnętrzu $B + \alpha$ leży jakiś punkt a_n. Jeżeli zachodzi przypadek 3), to n musi być równe 1, gdyż w przeciwnym razie we wnętrzu B znajdowałby się punkt a_{n-1} i B nie byłby odcinkiem podziału. Ostatecznie, ponieważ przypadki 1), 2) i 3) nie zależą od długości odcinka B, liczba różnych długości nie może być większa niż trzy. $\square$

Ciągi rozmieszczone równomiernie

Wiemy już, że dla dowolnej liczby niewymiernej α zbiór wartości ciągu $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$ jest gęsty w przedziale $[0,1]$ oraz że po obcięciu go w dowolnym miejscu dzieli on przedział $[0,1]$ na odcinki, które mogą mieć tylko trzy różne długości. Pokażemy teraz, że ciąg ten ma własność istotnie silniejszą niż tylko gęstość. Porównajmy najpierw rysunek 3 z analogicznym rysunkiem dla zbioru $\{\{ne\}: n = 1,\dots,300\}$.

Rys. 7: Zbiór $\{\{ne\}: n = 1,\dots,300\}$.

Nie występuje tutaj zjawisko widoczne w przypadku ciągu $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$, polegające na skupianiu się wartości w wybranych punktach — odcinek $[0,1]$ jest pokryty w miarę równomiernie. Spróbujmy tę intuicje sformalizować.

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Powiemy, że jest on *rozmieszczony równomiernie modulo* 1, jeżeli dla dowolnych $x, y \in [0,1]$, $x < y$ mamy

Przez $\#X$ oznaczamy liczbę elementów zbioru X.

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\#\{1 \leqslant n \leqslant N : \{a_n\} \in [x,y]\}}{N} = y - x.$$

Oznacza to tyle, że dla każdego podprzedziału $[x,y]$ przedziału $[0,1]$ frakcja tych wyrazów skończonego ciągu $(a_n)_{n=1,\dots,N}$, których części ułamkowe należą do $[x,y]$, ma przy N dążącym do $+\infty$ granicę równą długości $y-x$ tego podprzedziału.

Pokażemy, że własność tę posiada ciąg $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$, gdy α jest liczbą niewymierną.

Piers Bohl (1865-1921).

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu. *Ciąg $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozmieszczony równomiernie modulo* 1 *wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą niewymierną.*

Dowód. Jeżeli α jest liczbą wymierną, to $n\alpha$ jest liczbą całkowitą dla odpowiednio dużych n, więc ciąg $(\{n\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$ nie jest rozmieszczony równomiernie.

Załóżmy, że α jest liczbą niewymierną i ustalmy $\varepsilon > 0$. Na mocy lematu Kroneckera wiemy, że istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $\delta := \{k\alpha\}$ należy do przedziału $(0,\varepsilon)$. Podzielmy ciąg $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ na k podciągów $(a_{n_{i,j}})_{j\geqslant 0}$, $i = 1,\dots,k$ względem n modulo k, gdzie

$$a_{n_{i,j}} = i\alpha + jk\alpha, \qquad i = 1,\dots,k, \quad j \geqslant 0.$$

Wykorzystujemy to, że podciągów jest skończenie wiele.

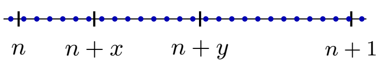
Wystarczy pokazać, że każdy z tych k ciągów jest równomiernie rozmieszczony modulo 1.

Ustalmy $i \in \{1,\dots,k\}$ i zauważmy, że

$$a_{n_{i,j}} = i\alpha + j\lfloor k\alpha\rfloor + j\{k\alpha\} = b_i + j\delta, \qquad j \geqslant 0$$

dla $b_i = i\alpha + \lfloor k\alpha\rfloor$. Ciąg $(a_{n_{i,j}})_{j\geqslant 0}$ jest zatem ciągiem arytmetycznym o różnicy δ. Niech $x, y \in [0,1]$, $x < y$. Jeżeli $n \in \mathbb{N}$ i $n > b_i$, to liczba m wyrazów ciągu $(a_{n_{i,j}})_{j\geqslant 0}$ należących do przedziału $[n+x, n+y]$ spełnia warunek

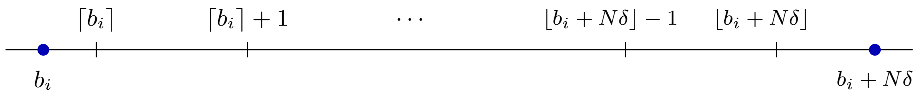
Na niebiesko zaznaczono wyrazy ciągu arytmetycznego $(a_{n_{i,j}})_{j\geqslant 0}$ o różnicy δ.



$$\frac{y-x}{\delta} - 1 \leqslant m \leqslant \frac{y-x}{\delta} + 1.$$

Dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ wewnątrz przedziału $[a_{n_{i,0}}, a_{n_{i,N}}] = [b_i, b_i + N\delta]$ znajduje się dokładnie $\lfloor b_i + N\delta\rfloor - \lceil b_i\rceil$ odcinków długości jeden o końcach całkowitych:

Liczba $\lceil b_i\rceil$ jest najmniejszą liczbą całkowitą nie mniejszą niż b_i.



Otrzymujemy zatem

$$\left(\frac{y-x}{\delta}-1\right)(N\delta-2)\leqslant s_N\leqslant\left(\frac{y-x}{\delta}+1\right)N\delta,$$

gdzie

$$s_N=\#\big\{0\leqslant j\leqslant N\colon\{a_{n_{i,j}}\}\in[x,y]\big\}.$$

Dzieląc te nierówności przez N i przechodząc z N do $+\infty$, otrzymujemy

$$\limsup_{N\to+\infty}\frac{s_N}{N}\leqslant y-x+\delta\leqslant y-x+\epsilon$$

oraz

$$\liminf_{N\to+\infty}\frac{s_N}{N}\geqslant y-x-\delta\geqslant y-x-\epsilon,$$

co z dowolności ϵ kończy dowód. □

Wacław Sierpiński (1882-1969).

Twierdzenie o równomiernym rozmieszczeniu zostało udowodnione niezależnie przez Piersa Bohla, Wacława Sierpińskiego i Hermana Weyla w latach 1909-1910. Warto może przy okazji nadmienić, że najmniej z nich znany, Łotysz Bohl, jako pierwszy udowodnił twierdzenie Brouwera o punkcie stałym dla wymiaru trzy, ale jego wynik pozostał przez lata niezauważony. Prace Weyla natomiast istotnie przyczyniły się do rozwoju teorii ciągów rozmieszonych równomiernie. Znalazł on też uniwersalne kryterium, pozwalające w wielu sytuacjach wnioskować o równomiernym rozmieszczeniu

Kryterium Weyla. *Ciąg* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest rozmieszczony równomiernie modulo* 1 *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $k\in\mathbb{N}$ *zachodzi*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi ika_n}=0,$$

gdzie i *jest jednostka urojoną.*

Herman Weyl (1885-1955).

Dowód kryterium Weyla nie jest szczególnie skomplikowany, ale wymaga posiadania pewnych wiadomości o szeregach Fouriera, więc nie będziemy go tu przytaczać. Zamiast tego zobaczmy, jak łatwo można dzięki niemu uzyskać twierdzenie o rozmieszczeniu równomiernym modulo 1 ciągu $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$. Zauważmy, że dla $a_n=n\alpha$ mamy

$$\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi ika_n}=\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi ikn\alpha}=\sum_{n=1}^{N}\big(\mathrm{e}^{2\pi ik\alpha}\big)^n=\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi ikN\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2\pi ik\alpha}}\mathrm{e}^{2\pi ik\alpha},$$

przy czym w ostatniej równości wykorzystaliśmy wzór na sumę skończonego ciągu geometrycznego. Ponieważ α jest liczbą niewymierną, to $1-\mathrm{e}^{2\pi ik\alpha}\neq 0$. Ponadto $|1-\mathrm{e}^{2\pi ikN\alpha}|\leqslant 2$, więc

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi ika_n}\right|\leqslant\frac{1}{N}\cdot\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{2\pi ik\alpha}|},$$

co kończy dowód.

Pierwsza połowa XX w. obfitowała w różnorodne wyniki dotyczące równomiernego rozmieszczenia. Wspomnijmy na koniec o dwóch z nich. W 1935 r. Jurjen Koksma pokazał, że dla prawie wszystkich w sensie Lebesgue'a $a>1$ ciąg $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rozmieszczony równomiernie modulo 1. Trochę później, w 1937 r., Iwan Winogradow w trakcie dowodu nieparzystej hipotezy Goldbacha wykazał, że dla dowolnej liczby niewymiernej α ciąg $(p_n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie p_n jest n-tą liczbą pierwszą, jest rozmieszczony równomiernie modulo 1. Zdecydowanie więcej informacji zainteresowany Czytelnik znajdzie w pracach cytowanych na marginesie.

A. Kar, *Weyl's equidistribution theorem*, Resonance, **8**, 2003.

L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1974.