

# Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej

Henryk ŻOŁĄDEK\*

## 1. Twierdzenie Poincarégo o powracaniu.

Zacniemy od kilku przykładów.

(A) **Obrót na okręgu.** Utożsamiamy okrąg  $\mathbb{S}$  z  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x \pmod{1} : x \in \mathbb{R}\}$ . Dla  $\alpha \in [0, 1)$  kładziemy

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$$

i dostajemy przekształcenie  $R_\alpha : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ . Jego dynamika w istotny sposób zależy od tego, czy „kąt obrotu”  $\alpha$  jest wymierny.

Jeśli  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  jest nieskracalnym ułamkiem, to przekształcenie  $R_\alpha$  jest

**okresowe**,  $R_\alpha^q \stackrel{\text{df}}{=} \underbrace{R_\alpha \circ \dots \circ R_\alpha}_q = Id$  ( $q$ -krotna iteracja jest identycznością),

bo  $R_\alpha^q(x) = x + p \pmod{1} = x$ . To oznacza, w szczególności, że  $R_{p/q}$  ma **własność powracania**:

*Dla dowolnego punktu początkowego  $x_0 \in \mathbb{S}$  jego dodatnia orbita  $\mathcal{O}^+(x_0) = \{R_{p/q}(x_0), R_{p/q}^2(x_0), \dots\}$  przechodzi przez punkt  $x_0$ .*

Przy tym to przechodzenie zachodzi nieskończenie wiele razy; w istocie, ta orbita jest skończonym zbiorem.

Jeśli  $\alpha$  jest niewymierne, to orbity dodatnie wszystkich punktów są nieskończone. Niemniej jednak,  $R_\alpha$  posiada **własność powracania** w nieco zmodyfikowanej wersji:

*Dla dowolnego punktu początkowego  $x_0$  i dowolnego jego otoczenia  $U$  orbita  $\mathcal{O}^+(x_0)$  przecina  $U$ .*

Tutaj także przechodzenie orbity przez  $U$  zachodzi nieskończenie wiele razy. Ta własność wynika z faktu, że każdy zbiór  $\mathcal{O}^+(x_0)$  jest gęsty w  $\mathbb{S}$ . W teorii układów dynamicznych mówi się, że  $R_\alpha$  ma własność **topologicznej tranzytywności**; również mówi się, że dynamika  $R_\alpha$  jest **prawie okresowa**.

(B) **Skośny obrót torusa.** Niech  $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$  będzie dwuwymiarowym torusem. Zdefiniujmy przekształcenie  $T : X \rightarrow X$  następująco:

$$T(x, y) = (x, x + y \pmod{1}).$$

To oznacza, że okręgi  $\mathbb{S}_x = \{x\} \times \mathbb{S} = \{(x, y) : y \in \mathbb{S}\} \subset X$  są niezmiennicze względem przekształcenia  $T$ , a ograniczenie  $T$  do każdego z tych okręgów jest obrotem o kąt zależny od wyboru okręgu. Dynamika przekształcenia  $T$  jest w pewnym sensie hybrydowa: dla  $x$  wymiernego  $T|_{\mathbb{S}_x} : \mathbb{S}_x \rightarrow \mathbb{S}_x$  jest okresowe, a dla  $x \notin \mathbb{Q}$  jest ono prawie okresowe.

Łatwo zauważyć, że własność powracania w drugiej wersji jest spełniona.

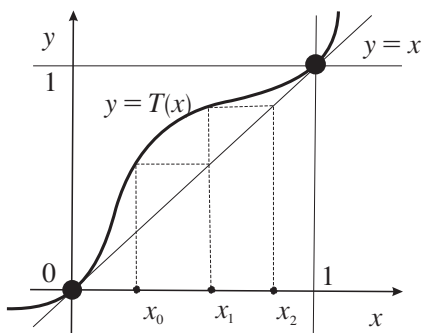
(C) **Siodło-węzeł na okręgu.** Wzór

$$T(x) = x + \frac{1}{8} \sin^2(\pi x)$$

określa homeomorfizm przestrzeni  $X = \mathbb{S}$ . Istotnie, funkcja  $T$  spełnia  $T(x+n) = T(x) + n$  dla  $n \in \mathbb{Z}$  i jest rosnąca. Mamy  $T(n) = n$  dla  $n \in \mathbb{Z}$ , co oznacza, że punkt  $0 \in \mathbb{S}$  jest punktem stałym indukowanego przekształcenia okręgu.

Następnie, dla  $0 < x < 1$  mamy  $x < T(x) < 1$ . To oznacza, że dla dowolnego punktu  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{S}$  jego dodatnia orbita  $\mathcal{O}^+(x_0)$  pochodzi od zbioru punktów

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, Banacha 2, 02-097 Warszawa, zoladek@mimuw.edu.pl



Rys. 1. Siodło-węzeł na okręgu

Miara  $\mu$  w zbiorze  $X$  jest określona na pewnej  $\sigma$ -algebrze  $\mathfrak{M}$  podzbiorów  $X$ .

Mamy:

$\emptyset, X \in \mathfrak{M}$ ;

jeśli  $A, B \in \mathfrak{M}$ , to  $A \setminus B \in \mathfrak{M}$  i

$A \cap B \in \mathfrak{M}$ ;

jeśli  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}$ , to  $\bigcup A_n \in \mathfrak{M}$ .

Miara  $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  ma następujące własności:

$\mu(\emptyset) = 0$ ;

jeśli  $A \subset B$  to  $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ ;

jeśli zbiory  $A_1, A_2, \dots$  są parami

rozłączne, to  $\mu\left(\bigcup A_n\right) = \sum \mu(A_n)$

(przeliczalna addytywność).

Miara  $\mu$  nazywa się **probabilistyczną**,

jeśli  $\mu(X) = 1$ .

W zastosowaniach do układów dynamicznych zwykle przestrzeń  $X$  jest przestrzenią metryczną,  $\sigma$ -algebra jest generowana przez podzbiory otwarte (jest to tzw.  $\sigma$ -algebra zbiorów borelowskich) a miara jest regularna.

Zwykle się mówić, że pewna własność (punktów z  $X$ ) zachodzi dla **prawie wszystkich** punktów z  $A \in \mathfrak{M}$ , jeśli zbiór punktów z  $A$  pozbawionych tej własności ma miarę zero.

Niech zbiór  $B \subset A$  składa się z tych punktów  $x \in A$ , które nigdy nie powracają do  $A$ . Nietrudno przekonać się, że  $B \in \mathfrak{M}$ , o ile  $A \in \mathfrak{M}$ . Jeśli  $x \in B$ , to jego obrazy  $T^n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , leżą poza  $A$ ; tym bardziej  $T^n(x) \notin B$  lub, równoważnie,  $x \notin T^{-n}(B)$ . Widzimy, że  $B \cap T^{-n}(B) = \emptyset$  dla  $n \geq 1$ . Ale wtedy  $T^{-1}(B) \cap T^{-1-n}(B) =$

$$= T^{-1}(B \cap T^{-n}(B)) = T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

i, analogicznie,  $T^{-k}(B) \cap T^{-k-n}(B) =$

$$= T^{-k}(B \cap T^{-n}(B)) = \emptyset \text{ dla } n \geq 1$$

i  $k \geq 0$ . Zatem zbiory  $T^{-n}(B)$  są parami

rozłączne. Ponadto mają taką samą

miarę,  $\mu(T^{-n}(B)) = \mu(B)$ . Z własności

przeliczalnej addytywności miary  $\mu$

dostajemy  $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B)$ .

Gdyby  $\mu(B)$  było dodatnie, to ta ostatnia

miara byłaby nieskończona, ale to przeczy

własności  $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(B)\right) \leq \mu(X) = 1$

(miara jest probabilistyczna). Zatem

$\mu(B) = 0$ , co oznacza, że prawie każdy

punkt z  $A$  ma własność powracania do  $A$ .

ciągu  $\{x_1 = T(x_0), x_2 = T^2(x_0), \dots\} \subset \mathbb{R}$ , który jest rosnący i zbieżny do  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  (patrz rysunek 1). Punkt stały  $0 \in \mathbb{S}$  jest z jednej strony przyciągający, a z drugiej odpychający; stąd jego nazwa, **siodło-węzeł** (charakterystyczna dla analogicznego punktu stałego w dynamice dwuwymiarowej).

Czytelnik łatwo zauważy, że tylko jednopunktowa orbita punktu stałego  $\mathcal{O}^+(0) = \{0\}$  ma własność powracania według obu powyższych definicji. Dla  $x_0 \neq 0 \in \mathbb{S}$  orbita  $\mathcal{O}^+(x_0)$  rozmięka się z dostatecznie małym otoczeniem punktu  $x_0$ .

Ostatni przykład pokazuje, że nasze definicje własności powracania nie są adekwatne do zagadnień dynamicznych. Podstawowym elementem, którego tu brakuje, jest pojęcie miary niezmienniczej. Definicja miary jest dosyć abstrakcyjna i podajemy ją na marginesie.

Dla przekształcenia  $T : X \rightarrow X$  miara  $\mu$  jest **niezmiennicza**, jeśli

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A);$$

tutaj zakładamy, że przekształcenie jest mierzalne ( $T^{-1}(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$ ).

(Poniżej będziemy opuszczać napisy typu  $A \in \mathfrak{M}$ .)

W przykładzie (A) naturalną probabilistyczną miarą niezmienniczą dla obrotu  $R_\alpha$  jest miara Lebesgue'a  $\mu = \lambda^1 = dx$  na  $\mathbb{S}$  (indukowana z miary Lebesgue'a na  $\mathbb{R}$ , gdzie  $\lambda^1((a, b)) = b - a$ ). Ale w przypadku wymiernego obrotu,  $R_{p/q}$ , istnieją inne probabilistyczne miary niezmiennicze. Są to miary dyskretne

$$\mu = \frac{1}{q} (\delta_{x_0} + \delta_{x_1} + \dots + \delta_{x_{q-1}}),$$

równomiernie rozłożone na punktach orbit  $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, \dots, x_{q-1}\}$  punktów okresowych. Tutaj  $\delta_x$  jest tzw. miarą Diraca skupioną w punkcie  $x$ :  $\delta_x(A) = 1$ , jeśli  $x \in A$ , i  $\delta_x(A) = 0$  w przeciwnym przypadku.

Jeśli obrót jest niewymierny, to jedyną regularną probabilistyczną miarą niezmienniczą  $\mu$  jest miara Lebesgue'a. Posiada ona następującą własność **ergodyczności**:

*Jeśli  $T^{-1}(A) = A$ , to  $\mu(A) = 0$  lub  $\mu(A) = 1$ ; jedyne podzbiory niezmiennicze są trywialne w sensie miarowym, zbiór pusty lub cała przestrzeń.*

W przykładzie (B) naturalną miarą niezmienniczą dla  $T$  jest miara Lebesgue'a  $\lambda^2 = dxdy$  na torusie: prostokąt  $[a, b] \times [c, d]$  jest przekształcany na równoległobok o wysokości  $b - a$  i długości podstawy  $d - c$ . Ale istnieją też miary niezmiennicze postaci

$$\mu = \delta_{x_0} \times \lambda^1,$$

tzn. takie, że  $\mu(A \times B) = \delta_{x_0}(A) \cdot \lambda^1(B)$ . Są to miary skupione na okręgach  $\mathbb{S}_{x_0} \subset \mathbb{T}^2$ . Mamy też miary dyskretne  $\mu = \frac{1}{q} (\delta_{z_0} + \dots + \delta_{z_{q-1}})$  skupione na orbitach okresowych  $\mathcal{O}(z_0) = \{z_0, \dots, z_{q-1}\} \subset \mathbb{S}_{x_0}$ ,  $z_j = (x_0, y_j) = (x_0, y_0 + jx_0 \pmod{1})$ , dla  $x_0 = p/q \in \mathbb{Q}$ .

W przykładzie (C) jedyną regularną probabilistyczną miarą niezmienniczą dla przekształcenia  $T$  jest skupiona w punkcie stałym tego przekształcenia,

$$\mu = \delta_0.$$

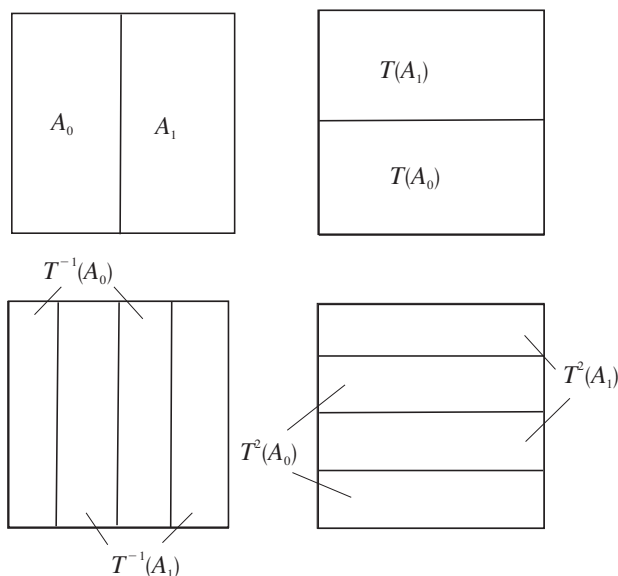
Teraz możemy sformułować **Twierdzenie Poincarégo o powracaniu**:

*Niech przekształcenie  $T : X \rightarrow X$  zachowuje probabilistyczną miarę  $\mu$ . Wtedy dla każdego zbioru  $A$  o mierze  $\mu(A) > 0$  prawie każdy punkt  $x_0 \in A$  powraca do  $A$ , czyli  $T^n(x_0) \in A$  dla pewnego  $n > 0$ .*

Pomimo istniejących kontrowersji związanych z tym twierdzeniem, jego dowód jest niezwykle prosty. Przedstawiamy go obok na marginesie.

Teraz możemy na nowo rozważyć przykład (C). Każdy podzbiór  $A \subset X$  dodatniej miary niezmienniczej musi zawierać punkt 0. Ale wtedy stwierdzenie „prawie każdy punkt  $x_0 \in A$ ” oznacza, że  $x_0 = 0$ . Ten punkt nie opuszcza zbioru  $A$ .

Przykłady (A), (B) i (C) pokazują dosyć szczególne mechanizmy powracania.



Rys. 2. Przekształcenie piekarza

Warto uzupełnić tę listę następującym przykładem.

**(D) Przekształcenie piekarza.** Weźmy  $X = [0, 1] \times [0, 1]$ , czyli kwadrat o boku 1. Najpierw zagniatamy go do prostokąta  $[0, 2] \times [0, 1/2]$ , potem odcinamy prawą połówkę  $[1, 2] \times [0, 1/2]$  i nakładamy ją na lewą połówkę. Z użyciem współrzędnych przekształcenie piekarza przyjmuje postać

$$T(x, y) = (2x, y/2) \text{ dla } x < 1/2 \text{ i } T(x, y) = (2x-1, (y+1)/2) \text{ dla } x \geq 1/2.$$

Łatwo zauważyć, że to przekształcenie zachowuje dwuwymiarową miarę Lebesgue'a  $\mu = \lambda^2 = dx dy$ :

(współczynnik rozciągania w poziomie)  $\times$  (współczynnik ściskania w pionie) = 1. Okazuje się ponadto, że to przekształcenie posiada następującą **własność mieszania**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

To oznacza, że obraz  $T^n(A)$  zbioru  $A$  po dużej liczbie iteracji rozkłada się prawie równomiernie w całym kwadracie (patrz rysunek 2).

Biorąc  $B = A$  z  $\mu(A) > 0$  dostajemy własność Poincarégo.

Własność mieszania jest silniejsza od własności ergodyczności; ta druga wynika z pierwszej. W szczególności, obrót niewymierny na okręgu nie jest mieszający, chociaż jest ergodyczny. Tutaj iteracje  $T^n(A)$  zbioru  $A$  (który można wybrać w postaci krótkiego łuku) „wędrują” po okręgu, odwiedzając wszystkie miejsca, ale nie zmieniając swojego kształtu.

Powyżej sformułowaliśmy twierdzenie o powracaniu dla pojedynczego przekształcenia zachowującego miarę. W zastosowaniach fizycznych zwykle mamy do czynienia z ciągłą ewolucją pewnego układu, opisywanego serią równań różniczkowych. Wtedy mamy jednoparametrową rodzinę (potok)  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  przekształceń  $S_t : X \mapsto X$  spełniającą warunki półgrupy:  $S_0 = Id$ ,  $S_{s+t} = S_s \circ S_t$ . Taka rodzina zachowuje miarę  $\mu$ , gdy  $\mu(S_t^{-1}(A)) = \mu(A)$  dla każdego  $t$ . Rodzina  $\{S_t\}$  zawiera dyskretną „kaskadę”  $\{Id = S_0, T \stackrel{df}{=} S_1, T^2 = S_2, \dots\}$ . Własność powracania dla potoku oznacza własność powracania dla przekształcenia  $T = S_1$ .

## 2. Paradoksy związane z twierdzeniem o powracaniu

Twierdzenie Poincarégo o powracaniu wywoływało (i najwidoczniej nadal wywołuje) dyskusje o charakterze filozoficznym. Są one związane z próbami jego zastosowania do układów fizycznych złożonych z dużej liczby cząstek. Standardowym przykładem jest gaz skupiony w połowce zbiornika, z którego usuwa się przegrodę. Inny przykład jest bardziej wyszukany i wiąże się z pewnym twierdzeniem pochodzącym od Ludwiga Boltzmanna.

### 2.1. Twierdzenie Liouville'a

Rozważmy gaz złożony z  $N$  klasycznych cząstek w obszarze (zbiorniku)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Jego dynamika jest opisana układem  $6N$  równań różniczkowych Newtona

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = F_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

gdzie  $x_i \in \Omega$  są położeniami kolejnych cząstek,  $v_i \in \mathbb{R}^3$  są ich prędkościami, a  $F_i = F_i(x_1, \dots, x_N) = -\partial U / \partial x_i$  są siłami na nie działającymi.

Dla uproszczenia zakładamy, że masy cząstek są takie same (równe 1),

a potencjał  $U = U(x_1, \dots, x_N)$  jest sumą energii potencjalnych wzajemnych oddziaływań cząstek,  $U = \sum_{i < j} V(|x_i - x_j|)$ . Ponadto przyjmujemy, że cząstki odbijają się od ścian zbiornika  $\Omega$  zgodnie z regułą (kąąt padania) = (kąąt odbicia).

Tutaj przestrzenią fazową  $X$ , w której działa potok  $\{S_t\}$  definiujący ewolucję układu  $N$  cząstek, jest

$$\Omega^N \times (\mathbb{R}^3)^N = \{(x_1, \dots, x_N, v_1, \dots, v_N) : x_i \in \Omega, v_i \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^{6N}.$$

**Twierdzenie Liouville'a** mówi, że:

$6N$ -wymiarowa miara Lebesgue'a  $\lambda^{6N} = d^3x_1 \dots d^3x_N d^3v_1 \dots d^3v_N$  jest niezmiennicza dla potoku  $\{S_t\}$ .

Niestety, ta miara nie jest probabilistyczna; nawet nie można jej unormować, bo  $\lambda^{6N}(X) = \infty$ . Jednak fizycy potrafią w sposób naturalny zmodyfikować powyższą miarę do niezmienniczej miary probabilistycznej. Istotny jest tu fakt, że energia całkowita układu  $E$  jest stała w trakcie ewolucji. Składa się ona z energii kinetycznej  $T(v_1, \dots, v_N) = \frac{1}{2} \sum |v_i|^2$  i energii potencjalnej  $U(x_1, \dots, x_N)$ . Jeśli obszar  $\Omega$  jest ograniczony, to przy naturalnych założeniach o potencjale wzajemnych oddziaływań  $V$  energia potencjalna  $U$  jest ograniczona z dołu i z góry. Natomiast ograniczoność  $T$  implikuje ograniczenia prędkości  $|v_i|$ . Zatem nałożenie jakiegoś warunku ograniczoności na  $E$  implikuje ograniczoność przestrzeni fazowej. Miary używane przez fizyków są postaci

$$\mu = \frac{1}{Z} \Phi(E) \lambda^{6N},$$

gdzie (suma statystyczna)  $Z$  jest czynnikiem normującym, a  $\Phi$  jest pewną funkcją: np.  $\Phi(E) = 1$  dla  $E \in [E_0, E_1]$  i  $\Phi(E) = 0$  poza tym przedziałem dla tzw. zespołu mikrokanonicznego, lub  $\Phi(E) = \exp(-E/kT)$  dla zespołu kanonicznego ( $k$  jest stałą Boltzmana, a  $T$  temperaturą).

Wobec tego twierdzenie Poincarégo powinno dać się stosować do naszego układu. Jak to pogodzić z faktem, że raczej nie obserwuje się powrotu cząstek gazu do jednej połówki?

## 2.2. Lemat Kaca

Wyjaśnienie powyższego „paradoksu” leży w fakcie, że twierdzenie Poincarégo nosi charakter jakościowy, a nie ilościowy. Nic nie mówi się w nim o czasie powrotu.

Rozważmy zbiór  $A$  o dodatniej mierze z twierdzenia o powracaniu. Dla  $x \in A$  zdefiniujemy

$$k_A(x) = \min \{n \geq 1 : T^n(x) \in A\}$$

i  $k_A(x) = \infty$ , gdy powyższa definicja nie działa. Jest to **czas pierwszego powrotu punktu  $x$  do zbioru  $A$** . Twierdzenie o powracaniu mówi, że  $k_A(x) < \infty$  dla prawie wszystkich punktów  $x \in A$ .

Nietrudno pokazać, że

$$\int_A k_A d\mu = \mu \left( \bigcup_{n \geq 1} T^{-n}(A) \right),$$

natomiast

gdys przekształcenie  $T$  jest ergodyczne, to

$$\int_A k_A d\mu = 1.$$

Jest to treścią **Lematu Kaca**. Stąd wynika, że im mniejsza jest miara zbioru  $A$ , tym dłuższy jest **średni czas  $\langle k_A \rangle$  pierwszego powrotu do  $A$** :  $\langle k_A \rangle \sim 1/\mu(A)$ . Po więcej szczegółów odsyłam czytelnika do monografii I. P. Kornfelda, Ya. G. Sinaj i S. V. Fomina „Teoria ergodyczna”.

W przypadku gazu w zbiorniku  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , gdzie  $\Omega_1$  i  $\Omega_2$  są dwiema połówkami zbiornika, zbiór odpowiadający skupieniu się cząstek w  $\Omega_1$  ma postać  $A = \Omega_1^N \times (\mathbb{R}^3)^N$  i ma miarę rzędu  $1/2^N$ . Dla małej liczby cząstek, np.  $N = 4$ , symulacje numeryczne demonstrują powracanie wszystkich cząstek do  $\Omega_1$ , ale dla  $N = 40$  nic takiego nie daje się zaobserwować. Tu odsyłam czytelnika do książki F. Reifa „Fizyka statystyczna” (z berkeleyowskiego kursu fizyki). Dla  $N$  rzędu liczby Avogadro ( $\sim 10^{23}$ ) oczekiwany czas powrotu jest superastronomiczny ( $\sim 2^{10^{23}}$ ). Nawet fakt, że potok  $\{S_t\}$  nie jest ergodyczny, bo energia układu  $E$  jest stała (porównaj przykład (B)), nie jest w stanie istotnie zaniżyć tego oszacowania.

### 2.3. Twierdzenie Boltzmanna

W teorii kinetycznej rozrzedzonych gazów podstawowym objektem jest tzw. **funkcja rozkładu**  $f(v, t) = f(v)$  taka, że

$$f(v, t) \Delta^3 x \Delta^3 v$$

jest uśrednioną liczbą cząstek, które w chwili  $t$  znajdują się w małej kostce o objętości  $\Delta^3 x$  wokół punktu  $x \in \mathbb{R}^3$ , i których prędkości leżą w kostce o objętości  $\Delta^3 v$  wokół  $v \in \mathbb{R}^3$ . Tutaj objętości  $\Delta^3 x$  i  $\Delta^3 v$  są małe, ale nie za małe; takie, aby liczby  $f \Delta^3 x \Delta^3 v$  były duże.

(W przypadku, gdy na cząstki gazu działa siła zewnętrzna, np. wywołana obecnością ścian zbiornika, funkcja rozkładu zależy również od  $x$  oraz poniższe równanie Boltzmanna jest bardziej skomplikowane; my rozważamy najprostszą sytuację.)

Funkcja rozkładu spełnia następujące **równanie kinetyczne Boltzmanna**:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(v) = \int d^2 \omega \int d^3 v_2 \sigma(\omega) |v_1 - v_2| \{f(u_1) f(u_2) - f(v_1) f(v_2)\}.$$

Po prawej stronie tego równania mamy bilans będący rezultatem wzajemnych zderzeń cząstek:  $N_1$  i  $N_2$  cząstek zderza się ze sobą i część z nich opuszcza otoczenie punktu  $(x, v)$  oraz  $M_1$  i  $M_2$  cząstek zderza się i część z nich trafia w otoczenie punktu  $(x, v)$ .

Tutaj  $N_1 = f(v_1) \Delta^3 x \Delta^3 v$ ,  $v_1 = v$ ,  $N_2 = f(v_2) \Delta^3 x \Delta^3 v$ ,  $M_1 = f(u_1) \Delta^3 x \Delta^3 v$  i  $M_2 = f(u_2) \Delta^3 x \Delta^3 v$ . Wielkość  $\sigma(\omega)$  (zależna od potencjału wzajemnego oddziaływania) jest tzw. przekrojem czynnym rozpraszania, t.j. zderzenia się dwóch cząstek o prędkościach  $v_1$  i  $v_2$ , które potem rozbiegają się z prędkościami  $u_1$  i  $u_2$  pod kątem bryłowym  $\omega$  (względem  $v_{1,2}$  w układzie środka masy, patrz rysunek 3).

W równaniu Boltzmanna jest ukryte istotne założenie o **molekularnym chaosie**:

*Uśredniona liczba par cząstek w kostce o objętości  $\Delta^3 x$  wokół  $x$  i z prędkościami w kostkach o objętościach  $\Delta^3 v$  wokół  $v_1$  i  $v_2$  wynosi*

$$N_1 N_2 = f(v_1) \Delta^3 x \Delta^3 v \cdot f(v_2) \Delta^3 x \Delta^3 v.$$

Zdefiniujmy za Boltzmannem funkcję

$$H(t) = \int f(v, t) \ln f(v, t) d^3 v;$$

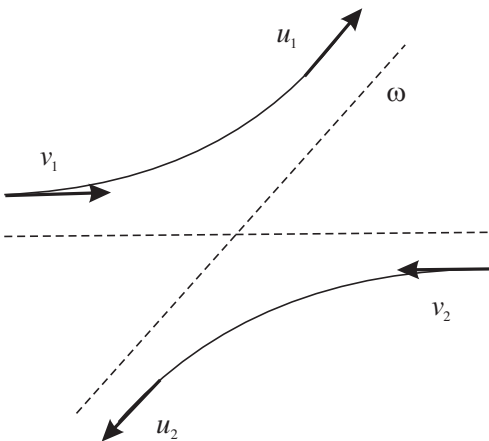
z dokładnością do współczynnika odpowiada ona minus entropii układu.

Z równania Boltzmanna wynika następujące **twierdzenie H Boltzmann**:

$$\frac{dH}{dt} \leq 0.$$

Niewątpliwie Boltzmannowi chodziło o matematyczne wyprowadzenie trzeciego prawa termodynamiki orzekającego, że entropia nie maleje. Ponadto z tego twierdzenia i z równania Boltzmanna wynika, że funkcja rozkładu powinna dążyć, przy  $t$  dążącym do nieskończoności, do równowagowego rozkładu Maxwella

$$f_0 = \text{const} \cdot \exp(-a(v - v_0)^2).$$



Rys. 3. Rozpraszanie dwóch cząstek

Oczywiście Boltzmann miał na imię Ludwig Eduard.

Sądząc z literatury, twierdzenie to doczekało się ostrej krytyki. Jednym z argumentów była sprzeczność z niezmienniczością równań Newtona względem odwrócenia strzałki czasu. Ten „paradoks odwracalności” wyjaśniano założeniem o molekularnym chaosie; zderzenia mogą powodować chwilowe załamania się tego postulatu. Podnoszony był również argument sprzeczności z twierdzeniem Poincarégo, „paradoks powracania”. Zainteresowanym polecam książkę K. Huanga „Mechanika statystyczna”.

Wydaje się, że wyjaśnienie ostatniego paradoksu leży w zakresie dosyć elementarnej matematyki. W samej definicji funkcji rozkładu zakłada się, że liczba cząstek  $f\Delta^3x\Delta^3v$  wokół  $(x, v)$  jest duża (bez podawania ilościowych danych). Ale każdy student dowolnego wydziału ścisłego uczelni wyższej wie, że bywa tak, iż  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \neq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty}$ .

## 2.4. Pierścień Kaca

W marcowym numerze *Delty* z 2004 roku Krzysztof Rejmer przedstawił pewien mocno uproszczony model mechaniki statystycznej, tzw. **pierścień Kaca**. Został on zaproponowany przez polskiego matematyka Marka Kaca (tego od lematu Kaca).

Mamy  $N$  cząstek rozlokowanych równomiernie na okręgu, przy czym każda cząstka może występować w dwóch stanach (kolorach). W dyskretnych momentach czasu  $t = n \in \mathbb{N}$  cząstki przesuwają się o jedno miejsce (w ustalonym z góry kierunku). Przy każdym przesunięciu zmieniają swój stan w losowy sposób, nie wchodzę tutaj w szczegóły.

W każdym razie, po  $n = 2N$  krokach układ powraca do stanu wyjściowego. Jednak, gdy  $1 \ll n \ll N$ , to mamy

$$\langle \Delta(n) \rangle = \lambda^n \langle \Delta(0) \rangle,$$

gdzie  $\Delta(n)$  jest bezwzględną różnicą liczb cząstek w dwóch stanach po  $n$  krokach,  $0 < \lambda < 1$  i  $\langle \cdot \rangle$  oznacza uśrednienie po „realizacjach” modelu. Zatem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \Delta(n) \rangle = 0$  podczas, gdy  $\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Delta(n) \rangle$  nie istnieje.