Perspektywa według Strzemińskiego – część druga

Marek KORDOS, Anna LUDWICKA***

Jest to skrócony zapis odczytu na LII *Szkole Matematyki Poglądowej*, Rynia, 2014.

Tekst naszego pierwszego odczytu został zamieszczony w numerze 33 czasopisma *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* na str. 15–25, http://www.msn.uph.edu.pl /msn/33/kordos@al.pdf

Sugerujemy by przed czytaniem tego tekstu przeczytać wyżej przytoczony, a i potem, przy czytaniu niniejszego, dogodnie będzie mieć tamten pod ręką i konfrontować jeden z nich z drugim.

Dziesięć lat temu mieliśmy zaszczyt prezentować odczyt pod prawie takim samym tytułem. Dziś chcieliśmy zaprezentować tę tematykę z „wyższego punktu widzenia".

Jan Gaj, wspaniały fizyk, bliski nam zwłaszcza z racji prowadzonego przez niego w *Delcie* działu *Laboratorium w domu*, porównywał wiedzę do tortu. Mówił, że dla konsumentów tort kroimy pionowo, aby poznali wszystkie jego smaki, ale gdybyśmy chcieli dyskutować o torcie z cukiernikami, sensownie byłoby „kroić" go poziomo, omawiać subtelności poszczególnych warstw. Podobnie dla studentów wiedzę będziemy wykładać pionowo, omawiać poszczególne dyscypliny, natomiast doktorantom warto przedstawiać wykłady poziome – według stosowanych metod. Dla przykładu, prawo Coulomba w wykładzie studenckim znajdzie się w elektromagnetyzmie, a w wykładzie dla doktorantów powinno się znaleźć razem ze zjawiskami, w których opisie stosujemy teorię potencjału.

Nasz poprzedni odczyt był „pionowy", wedle chronologicznie pojawiających się kierunków w plastyce. Teraz chcemy przedstawić odczyt „poziomy" i w tym właśnie celu spojrzymy inaczej na tytułowe pojęcie – perspektywę.

10 lat temu podaliśmy taką definicję perspektywy:
jest to zadanie konstrukcyjne – tak przedstawić rzeczywistość na płaszczyźnie obrazu, aby jak najlepiej, najdokładniej o niej poinformować.

Podręczników perspektywy malarskiej jest wiele – wypada przypomnieć, czemu wybraliśmy za przewodnik akurat *Teorię widzenia*.

Powód jest prosty, ale zasadniczy: Strzemiński jako bodaj jedyny zwrócił uwagę na fakt, iż poszukiwanie w konstrukcji obrazów jedynie optycznie trafnego odwzorowania $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^2$ jest wobec dokonań malarstwa czy grafiki absurdalne – wyraźnie widać, że twórcom chodziło o coś innego.

Czy np. *Guernikę* można uznać za takie odwzorowanie?

Picasso w sposób oczywisty nie prezentuje tu widoczku hiszpańskiego miasta, lecz przekazuje jeden sygnał: **bestialstwo** – wie, że nalot niemieckiego dywizjonu *Condor* daje początek potwornościom II wojny światowej.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Instytut Matematyki, UW, Banacha 2, 02-097 Warszawa, M.Kordos@mimuw.edu.pl
**ludekdesign@gmail.com

Idąc tym tropem i patrząc na sprawę „poziomo”, dochodzi się do wniosku, że problem perspektywy jedynie etymologicznie i potocznie dotyczy wyłącznie plastyki.

Należy za definicję perspektywy przyjąć następujący redukt poprzedniej:

jest to zadanie, jak przedstawić rzeczywistość, aby jak najlepiej o niej poinformować,

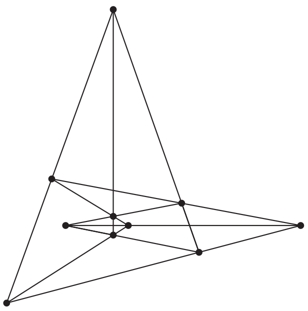
wtedy o perspektywie można mówić wszędzie – również w matematyce.

Usunęliśmy z poprzedniej definicji również słowo „najdokładniej”, bowiem już Tales wiedział, że **pełnej** informacji nie ma.

Stąd, każdy proces informacyjny deformuje rzeczywistość. Powstaje wtedy pytanie o **sens**, o **cel** owej deformacji – czyli o **perspektywę**.

Dla rozgrzewki: dwa przykłady różnych perspektyw w matematyce.

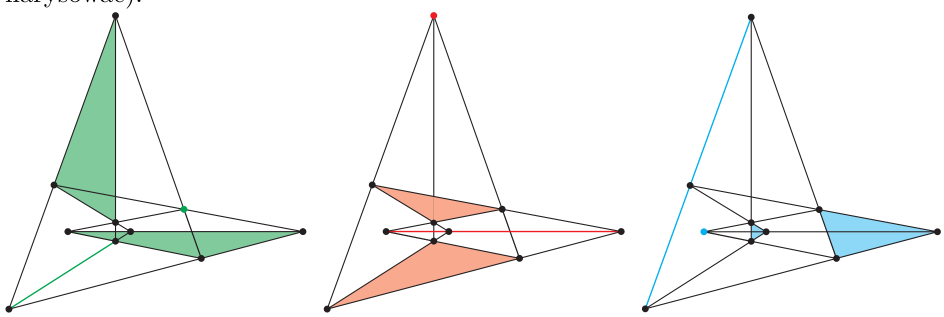
Symetria.



Rysunek ten bardzo łatwo wykonać – wystarczy zacząć go rysować od dowolnego punktu i dowolnej prostej, dowolnie też dobierając kolejne punkty – w efekcie otrzyma się 10 punktów na dziewięciu prostych, przy czym, gdy pozostanie nam połączenie trzech punktów, zawsze okażą się one współliniowe.

Potocznie (np. w szkole) symetrię kojarzymy z lustrem, a w nauczaniu początkowym tworzymy obrazy symetryczne za pomocą kleksografii. Chcąc jednak wyrazić inny aspekt geometrii płaszczyzny, Girard Desargues dostrzegł znacznie głębszą symetrię w rysunku popularnie nazywanym zagadką:
jak posadzić dziesięć drzew w dziesięciu rzędach po trzy w każdym rzędzie?

Rysunek na marginesie pokazuje jedno z możliwych 9 rozwiązań, a jego wyrafinowana symetria polega na tym, że każdy z punktów jest w nim w tej samej sytuacji. Jeśli popatrzymy na ten rysunek tak, że są to dwa trójkąty, których odpowiednie wierzchołki połączone są prostymi mającymi wspólny punkt, ich *środek perspektywiczny*, a ich przeciwległe boki przecinają się w punktach pewnej prostej, ich *osi perspektywicznej*, to rzuci się nam w oczy (czy na pewno?) fakt, że każdy z punktów jest środkiem perspektywicznym jakiejś pary już narysowanych trójkątów, a jest też narysowana ich oś perspektywiczna, za czym agitują poniższe trzy rysunki (pozostałych siedem każdy z pewnością umie sam narysować).



	×	×				×			
×		×					×		
×	×							×	
				×	×	×			
			×		×		×		
			×	×				×	
×			×						×
	×			×					×
		×			×				×
						×	×	×	

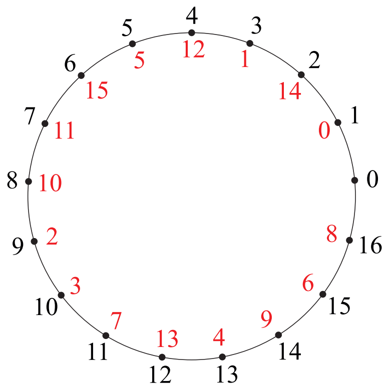
Poradnik dla niedowidzących: nazwij wierzchołki trójkątów na wybranym z pokolorowanych rysunków A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3, a proste A_iB_i nazwij c_i, proste A_iA_j nazwij a_k, gdzie $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, podobnie oznacz b_k. Przecięcie a_kb_k nazwij C_k, środek perspektywiczny oznacz O, a oś – o.
A teraz nazwij wiersze tabelki kolejno $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, O$, kolumny zaś
$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, o$.
Znak × oznacza, że punkt leży na prostej.

Teraz już widać symetrię?

Ale to jeszcze nie koniec: z pewnością nie każdy umie spojrzeć na tabelkę na marginesie z takiej perspektywy, by zobaczyć, że to ten sam rysunek, co poprzednio narysowane konfiguracje Desarguesa. Jeśli jednak mu się to uda, to zobaczy, że konfiguracja ta ma jeszcze jedną symetrię – rola punktów i prostych jest identyczna, co nazywa się dualnością.

Co dają te nowe spojrzenia na symetrię? Co uzyskujemy dzięki takiej zmianie perspektywy?
- unaocznia dualność,
- dowodzi, że naturalne jest myślenie o geometrii w kategoriach rzutowych,
- pozwala wprowadzić metody analityczne, które każą wszelkie zależności opisywać za pomocą współrzędnych jednorodnych,
- wobec twierdzenia: *jeśli funkcja jednorodna w stopniu k jest klasy C^k, to jest wielomianem* prowadzi do geometrii algebraicznej.

Przypomnienie: funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest jednorodna w stopniu k, jeśli dla dowolnych argumentów i dowolnego λ spełnia warunek $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n)$.



To, że przenumerowanie siedemnastu punktów za pomocą liczby 3 jest możliwe, w teorii liczb wyraża się stwierdzeniem, iż 3 jest *pierwiastkiem pierwotnym* dla 17. Znamy niektóre pierwiastki pierwotne niektórych liczb naturalnych (np. 3 jest pierwiastkiem pierwotnym dla wszystkich liczb pierwszych Fermata, więc choćby dla 5, a 10 jest pierwiastkiem pierwotnym dla 7), ale żadna ogólna metoda znajdowania pierwiastków pierwotnych nie jest znana.

Porządek liczb naturalnych.

Każdy przyzna, że 17 punktów na okręgu zostało ponumerowanych czarnymi liczbami prawidłowo, normalnie. Dziewiętnastoletni Gauss uznał jednak, że bardziej sensownie jest spojrzeć na kolejność tych punktów tak, jak wskazują to liczby czerwone.

Cóż to za perspektywa?

Jest to wynik owijania okręgu, na którym jest 17 punktów, prostą, na której są punkty 3^k. Istotnie: $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $10 = 3^3 - 17$, $13 = 3^4 - 4 \cdot 17$, $5 = 3^5 - 14 \cdot 17$, $15 = 3^6 - 42 \cdot 17$, $11 = 3^7 - 128 \cdot 17 \ldots$

Jakie są zalety takiego porządku? Popatrzmy na te punkty, jak na wektory o początku w środku okręgu. Nie wiem, czy od razu widać, że suma tych z numerami parzystymi leży na prostej łączącej środek okręgu z punktem oznaczonym czarną liczbą 0. Podobnie zresztą jak suma tych z numerami nieparzystymi, albo tych z numerami podzielnymi przez 4, albo podzielnymi przez 8 (no, to ostatnie to już każdy widzi!). Trudniej „zobaczyć", że długość każdego z wymienionych wektorów da się kolejno obliczyć za pomocą równania kwadratowego (pierwsze z nich to $x^2 + x - 4 = 0$).

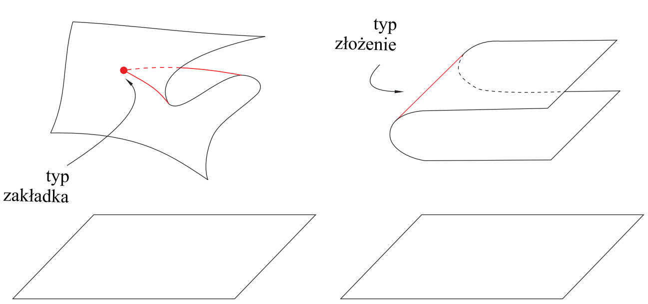
No, ale co daje nawet takie spostrzeżenie? Jakie są korzyści spoglądania z takiej perspektywy na porządek liczb naturalnych?
• Gauss zobaczył tym sposobem platońską konstrukcję 17-kąta, 257-kąta, 65537-kąta foremnego (i zobaczylibyśmy inne konstrukcje $2^{2^k} + 1$ kątów, gdybyśmy znali inne liczby pierwsze tej postaci),
• potem ujrzał dowód algebraicznej domkniętości liczb zespolonych,
• Galois z kolei dostrzegł w tej perspektywie teorię rozwiązalności równań algebraicznych,
a z wielu innych, korzystających z takiego sposobu patrzenia, niech zostaną wywołani
• Simon Newcomb i Paul Benford, którzy niezależnie odkryli prawo (udowodnione potem przez Bola, Sierpińskiego i Weyla) orzekające, iż dla potęg k, dla którego $\log k$ jest liczbą niewymierną, częstość pojawiania się na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego cyfry 1 jest równa 30,1%, 2 – 17,6%, 3 – 12,5%, 4 – 9,7%, 5 – 7,9%, 6 – 6,7%, 7 – 5,8%, 8 – 5,1%, 9 – 4,5%.

Jak widać choćby z tych przykładów, również w matematyce stosujemy różne perspektywy i tym sposobem odkrywamy przedtem dla nas niewidoczne osobliwości i głębokie tajemnice matematycznej przyrody.

Po tym wstępie spójrzmy na sytuacje, gdy perspektywa matematyczna i plastyczna głosiły to samo.

Linia.

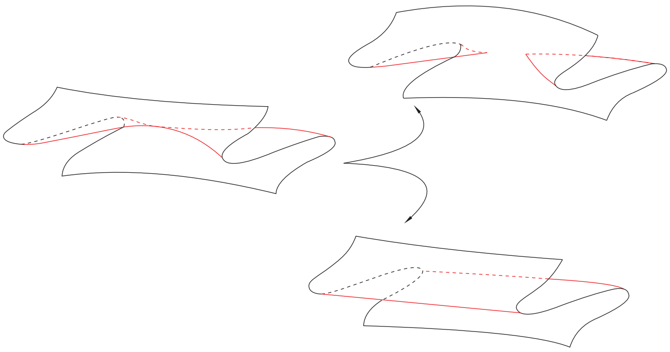
Twierdzenie Whitneya o katastrofach dwuwymiarowych głosi, że *Jeżeli powierzchnia znajduje się w położeniu ogólnym, to ma wyłącznie osobliwości (katastrofy) dwóch typów: złożenie lub zakładka.*



Praca Hasslera Whitneya *O odwzorowaniach płaszczyzny w siebie* dotyczy funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ postaci $f(x, y) := (f_1(x, y), f_2(x, y))$, gdzie $f_i \in C^\infty$.

Pomysł polega na tym, by przeciwdziedzinę przedstawić płasko, a nad każdym jej punktem umieścić wszystkie odpowiadające mu punkty dziedziny.

Katastrofa składa się z punktów osobliwych, a punkt osobliwy to ten, w którym rzut płaszczyzny stycznej do powyginanej dziedziny na przeciwdziedzinę nie jest płaszczyzną.



Teorię katastrof rozwinął René Thom, za co dostał medal Fieldsa. Istnieje kompletna lista katastrof elementarnych i wiemy, że dla wymiaru 1 elementarna katastrofa jest tylko jedna, dla wymiaru 2 – dwie, dla 3 – 5, dla 4 – 7, dla 5 – 11, a potem już nieskończenie wiele.

Zakładka i złożenie są stabilne – mała modyfikacja nie zmienia charakteru katastrofy. Takie katastrofy nazywa się elementarnymi (bo przecież – jak uczy nas życie – katastrofy mogą występować gromadnie).
Inne katastrofy stabilne nie są.

Twierdzenie Whitneya mówi, że w otoczeniu każdej funkcji znajdują się funkcje, których katastrofy to jedynie zakładki i złożenia.

Zaproponowana przez Whitneya perspektywa „koca na trawie" ma naturalną interpretację optyczną,
punkty osobliwe to te, w których płaszczyzna styczna trafia nas w oko,
to są te punkty, które widzimy jako wyróżniające się, to są te linie, które powinniśmy narysować, pokonując trudność przedstawienia kreską twarzy *en face*.

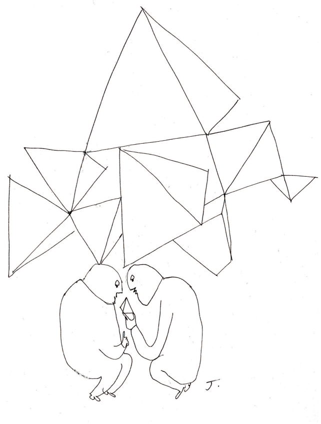
To najstarsza i do dziś najpowszechniejsza perspektywa rysunków i obrazów. Ma wiele odmian, ale jest doskonale identyfikowalna i ma niezastąpioną siłę przekazu.

To jeleń na rykowisku sprzed ok.17 tys. lat

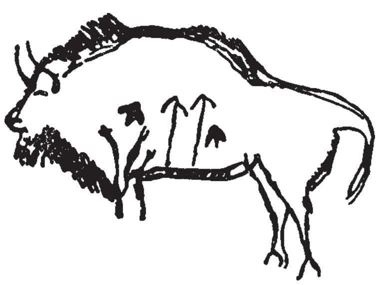
Tu widać, że dawni twórcy i odbiorcy ich dzieł dążyli wzrokiem za linią, nie zwracając uwagi na to, że inne linie na tym samym obszarze tworzą inne obrazy – to coś podobnego do naszej umiejętności dopowiadania sobie niedosłyszanych fragmentów mowy, czy niewyraźnych fragmentów tekstu.

Ilustracje Franciszki Themerson pokazują, że ciągła linia może wyrażać wszelkie relacje przestrzenne i emocjonalne.

A to współczesny biznesmen, inwestor budowlany, bohater popularnonaukowego dziełka Themersonów *Pan Tom buduje dom.*



I skrajnie inny stylowo rysunek tej samej pary autorów.



Strzemiński traktując sprawę historycznie, odróżnia używanie linii do zaznaczenia obrysu przedstawianego obiektu (perspektywa konturowa) od wkroczenia jej niejako „do wnętrza" (kontur w konturze), początkowo jedynie w celach instruktażowych, jak w rysunku cytowanym obok (gdzie wbijać oszczep). Ale wielość zastosowania linii okazała się niezmierzona.

Albrecht Dürer, *Jeźdzcy Apokalipsy*

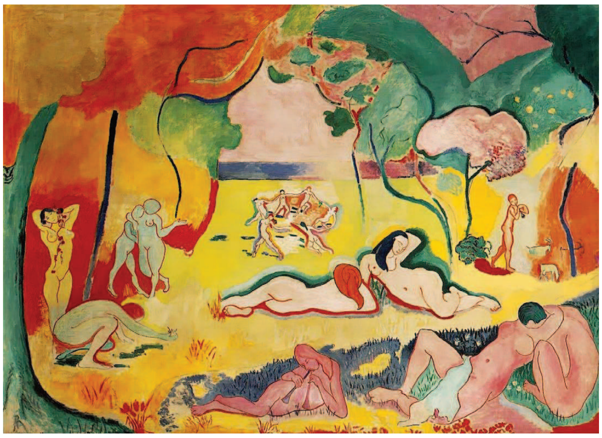
Dość oczywiste wydaje się rozwinięcie linii w wyrazistą grafikę jednobarwną – wielu utożsamia pojęcie „grafika” z posługiwaniem się jedynie rysunkiem liniowym.

Za cykl grafik *Łucznik II* Władysław Skoczylas otrzymał w 1928 roku brązowy medal olimpijski.

Z ilustracji Gustave'a Dorégo do „Don Kichota”

Linie są niejako wpisane w istotę witrażu, gdzie kontury rysunku pokrywają się z ołowianym łączeniem barwnego szkła. Dziś uczymy w ten sposób łączenia linii z kolorem w książeczkach do pokolorowania. Witraże upowszechniły się w średniowieczu i są tworzone do dzisiaj. W szczególny sposób dokonały ekspansji w okresie secesji. Czech, Alfons Mucha, stworzył urzekające witraże w katedrze św. Wita w Pradze (poniżej na środku), ale kojarzymy go przede wszystkim z „witrażową” grafiką. Jego przepiękne prace graficzno-malarskie były obecne wszędzie jako murale, zdobienia wnętrz, projekty biżuterii, a nawet w reklamie, która przecież wtedy miała swoje początki.

Widoczna z lewej strony reklama papierosów jest wykonana z zachowaniem tych samych reguł widzenia co autentyczny witraż – „ołowiane” granice kolorów staną się charakterystyczne dla secesji. Z kolei z prawej strony mamy grafikę Zofii Stryjeńskiej, która wydaje się być niemal dalszym ciągiem witrażu Muchy – pokrewieństwo jest większe: Stryjeńska stworzyła liczącą się szkołę polskiego wzornictwa i reklamy graficznej (patrz choćby logo *Żywca*).

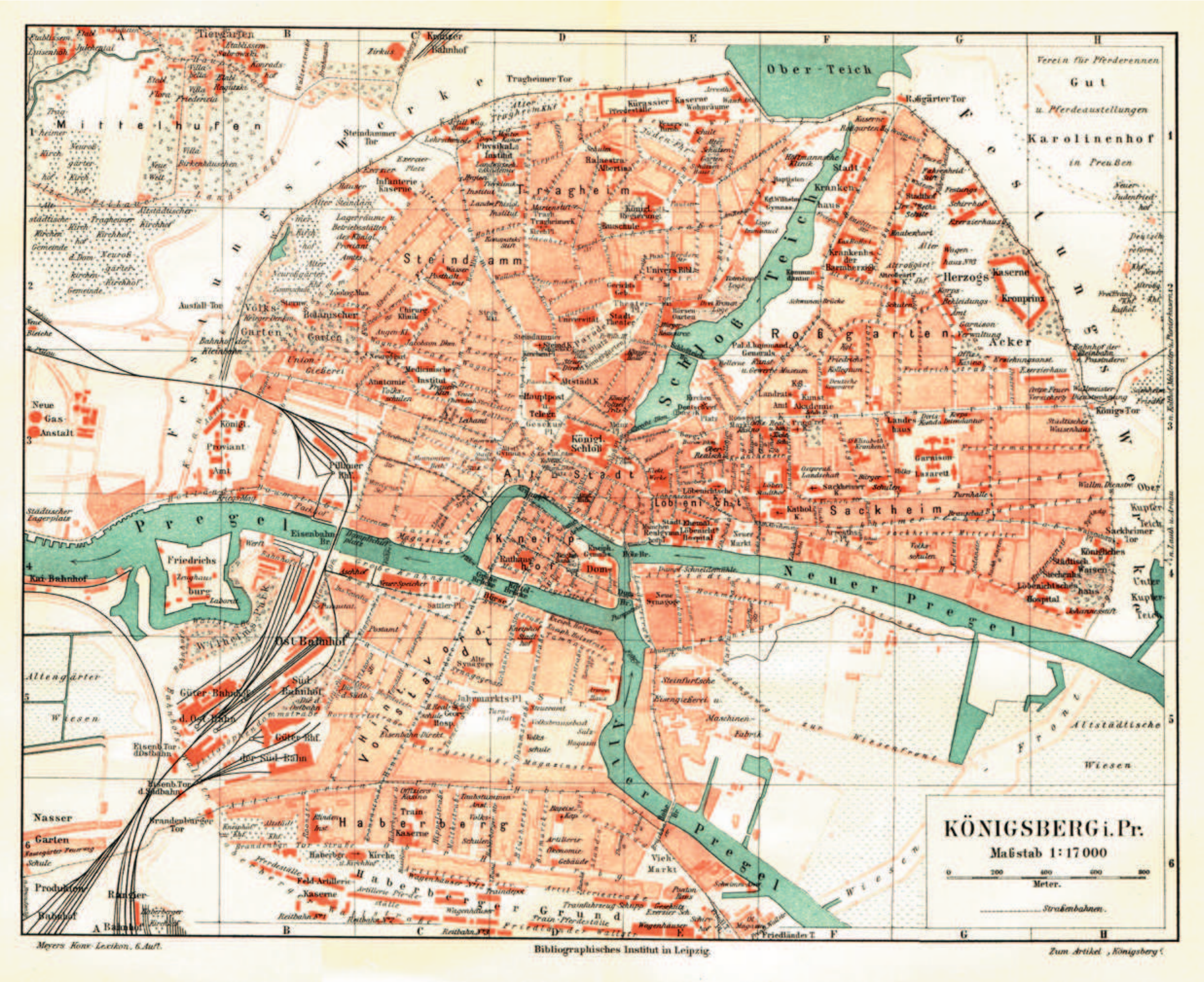


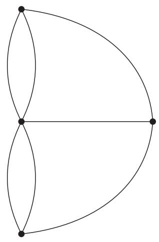
Jako przykład zastosowania perspektywy konturowej w malarstwie weźmy jednego z największych i najbardziej renomowanych artystów XX w., Henri Matisse'a, uważanego za jednego z inicjatorów sztuki nowoczesnej. Jego obrazy malowane są ostrą, schematyczną kreską, o żywych kolorach, kładzionych obok siebie w kontrastowych zestawieniach. Obraz przedstawiony obok nosi tytuł będący znamiennym dla Mattisse'a przesłaniem *Radość życia*.

Linia tryumfuje w widzeniu świata już 50 tysięcy lat, przybierając jednak przeróżne postaci.

Struktura.

Standardową procedurą w matematyce jest redukowanie złożonej struktury do grafu. Bardzo znanym przykładem jest zredukowanie XVIII-wiecznego Królewca





do grafu o czterech wierzchołkach i siedmiu krawędziach. Wielkie obszary gruntu są tu reprezentowane przez punkty-wierzchołki, z kolei ledwie dostrzegalne mosty są eksponowane przez wyraźne linie-krawędzie. Ale przecież o to w tej perspektywie chodzi – pytanie stojące przed Eulerem dotyczyło właśnie mostów: czy można przejść po nich, przechodząc po każdym dokładnie jeden raz. Realizm ustępuje tu ukazaniu wzajemnych relacji, powiązań. Choć może takie sformułowanie jest zasadniczo błędne: przecież dla problemu mostów królewieckich realne jest właśnie to, co przedstawia graf, podczas gdy plan miasta w pewnym sensie zaciemnia, ukrywa obiekt badany.

Tak kształtowały się perspektywy malarskie przełomu neolitycznego, gdy praludzkie stado stawało się ludzkim plemieniem i gdy wzajemne relacje stawały się znacznie ważniejsze od jednostkowej indywidualności.

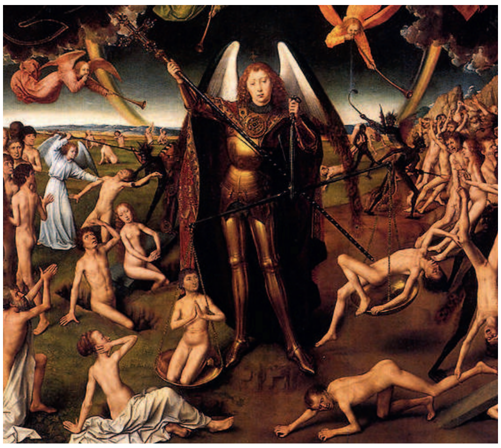
Mimo iż dynamizm i realizm przedstawionej obok, odnalezionej w hiszpańskiej jaskini sceny stracia zbrojnego, przebija – naszym (i Strzemińskiego) zdaniem – dorobek nowożytnego malarstwa batalistycznego, wielu trudno było uwierzyć, że ten sposób postrzegania i relacjonowania świata jest bliższy nam w czasie od nieraz drobiazgowo dopracowanych bizonów czy lwów paleolitu. Jednak potrzeba informowania o wzajemnych relacjach tak jak stworzyła język, tak na parę tysięcy lat zapewniła dominację perspektywie sylwetkowej.

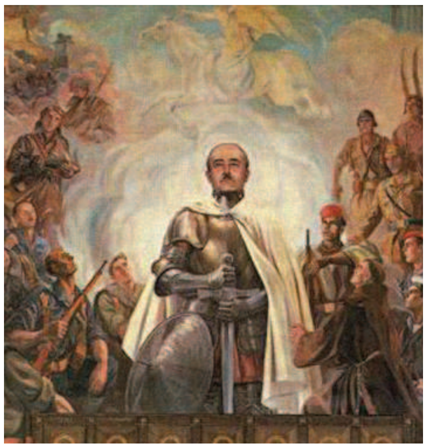
Warto zwrócić uwagę na fakt, że owe sylwetki nie eksponowały siebie: na poprzedniej rycinie była to walka, z lewej widzimy nie tyle zgrabne, neolityczne tancerki z gór saharyjskich, co sam taniec, a z prawej mamy XX wieczną grafikę Matisse'a przedstawiającą harmonię gestu, a nie konkretną osobę.

W polskim malarstwie analogicznych spojrzeń doszukiwać się można w pracach Jerzego Nowosielskiego czy uważanej za mistrzynię polskiej figuracji Teresy Pągowskiej.

Jerzy Nowosielski, *Akt na plaży* i *Dziewczyny na statku*; Teresa Pągowska, *Green*

Struktura społeczna w sposób naturalny uświęca hierarchię swoich członków. Choć wielu twierdzi, że małe jest piękne, jednak często chylimy głowę przed wielkimi, a już im na pewno nie przychodzi do głowy, że są naszego rozmiaru. Ten element struktury demonstruje obecna od neolitu po dziś dzień perspektywa intencjonalna.

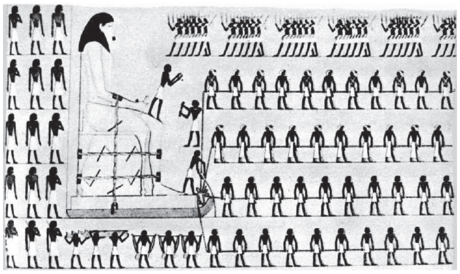


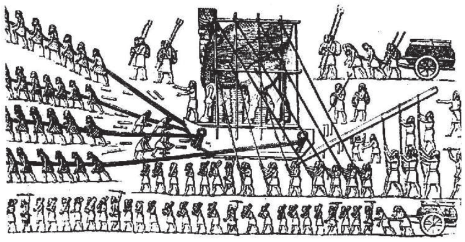


Faraon (grobowiec Nebamuna), Archanioł (*Sąd Ostateczny* Hansa Memlinga), czy generalissimus Franco (materiał propagandowy z hiszpańskiej wojny domowej, tej samej, której dotyczy *Guernika*) autentycznie dla autorów tych obrazów byli wielcy, tak wyglądała ich zdaniem rzeczywistość, taka była z ich perspektywy prawda, co więcej – taka była świadomość widzenia odbiorców ich dzieł.

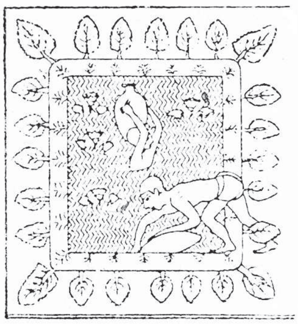
Ale nie tylko wielkość przywódców państwowych, duchowych czy militarnych decydowała o potędze struktur państwowych i społecznych. Był jeszcze wspólny, zbiorowy, skoordynowany wysiłek, pozwalający na dokonania nieosiągalne dla jednostek.

Takie widzenie nazywane jest – może nienajtrafniej – perspektywą wielorzędową. Nazwa ta pochodzi od mającego dziś 4000 lat malowidła z grobowca Dhutihotepa (transportowany przez 172 ludzi posąg ważył 60 ton) i współczesnej mu płaskorzeźby asyryjskiej (wyższa technika: wałki i dźwignie) oraz wielu analogicznie przedstawianych działań – odkrywców zadziwiało to, że naprężone liny załamują się pod kątem, a ustawienie pracujących w szeregach ma informować nas o ich usytuowaniu w głąb. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że ta perspektywa do dziś ma dla nas walor mocy, potęgi, siły, do czego odwołujemy się np. podczas defilad, choć już od ponad stu lat nigdy tak nie są formowane oddziały w walce.



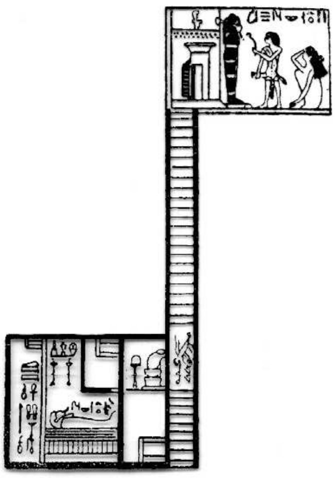


Instrukcja.

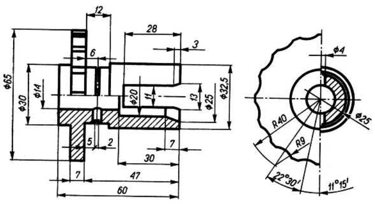


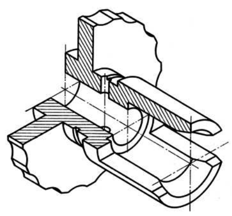
Współcześnie z perspektywą wielorzędową pojawia się w Egipcie niesłychanie wyrozumowana koncepcja notowania, kodowania za pomocą rysunku sytuacji tak, aby z niego można było odtworzyć z dużą precyzją to, co chciał zanotować autor, a czego naśladowanie optyczne nie mogłoby przekazać bądź przekazywałoby niedostatecznie precyzyjnie. Nazywa się tę perspektywę rozrzutowaną ze względu na jej początkowe realizacje.

Patrzymy na świat jak na pudełko (przeważnie prostopadłościenne), w którym się znajdujemy, zwracając się po kolei do jego ścian i denka (bądź dwóch – górnego i dolnego). I rysujemy to, co na ścianach i denkach widzimy. Następnie pudełko rozkładamy, bo przecież nasz obrazek musi być płaski.



Możliwości tej perspektywy sięgały znacznie dalej niż każdej z poprzednich: można było narysować coś, czego w ogóle nie widać, np. wnętrze lochu czy labiryntu.





Rysunek z lewej przedstawia komnaty wewnątrz piramidy, połączone klatką schodową. Z żadnego punktu nie można tego zobaczyć, ale nie wątpimy, że wykształcony Egipcjanin z epoki Średniego Państwa, bez trudu potrafił z tego rysunku dokładnie odtworzyć strukturę tych pomieszczeń. A nie wątpimy dlatego, że dziś inżynier bez problemu, patrząc na górne rysunki z prawej, widzi przedstawiony na niej detal, który dla „nieinżynierów” prezentujemy poniżej. Dzisiejsza konwencja perspektywy rozrzutowanej ma swoje miejsce w matematyce jako **geometria wykreślna**.

Kiedyś była ona nauczana na politechnikach, dziś, gdy komputery zastąpiły nas w sporządzaniu rysunków technicznych, uczy się już tylko ich odczytywania.

Nie sposób przecenić znaczenia rysunku technicznego dla naszej cywilizacji. Warto jednak zwrócić uwagę na podpowiedź, jaką perspektywa rozrzutowana niesie dla plastyki – dekompozycja, jako środek wyrazu powróci do nas w kubizmie, o czym dalej.

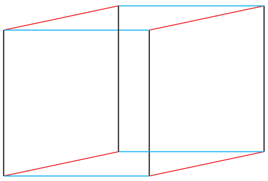
Oczywiście, można też bawić się w wyszukiwanie owej perspektywy w sztuce współczesnej. Wówczas przytacza się, na przykład, Kolorowe Malarstwo Tadeusza Dominika.

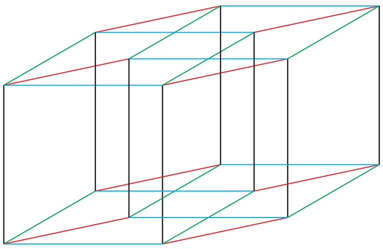
Konwencja.

Uwiecznione tak w Biblii, jak i w Iliadzie, walki społeczności pasterskich z rolniczymi, z punktu widzenia historyków odnotowane jako Wieki Ciemne, a kulturowo zwane epoką brązu, przyniosły – w sposób absolutnie niekonieczny i nie mający do dziś uzasadnienia – geometrię wylansowaną przez Dorów, geometrię, w której automorfizmami są podobieństwa. Warto podkreślić, że żadna inna geometria riemannowska nie ma automorfizmów zmieniających skalę.

Ta geometria (nazwana później euklidesową) została przyjęta i kultywowana przez wywodzącą się z greckiej tradycji formację nazywaną dziś kulturą europejską. Tej geometrii uczymy się w szkole.

To jest sześcian i kostka czterowymiarowa.





W obu przypadkach umawiamy się, że linie kolejnego koloru są prostopadłe do pozostałych.

Konsekwencją cywilizacyjną przyjęcia tak wyjątkowej geometrii jest plan i mapa (które pozwoliły nam dotrzeć do innych cywilizacji wcześniej, niż one dotarły do nas) i (przywołany już) rysunek techniczny (który pozwolił nam uzyskać materialną i wojskową przewagę, a nawet postawić w XIX wieku swoją stopę na głowach „reszty świata”).

Konsekwencją graficzną naszego wyboru jest kompletnie nieoptyczna, ale doskonała informacyjnie perspektywa równoległa.

Tu wypada zwrocić uwagę na fakt, iż szkoła wyrobiła w nas uznanie tej perspektywy za naturalną, choć jest ona niezgodna z tym, co widzą nasze oczy. Ta refleksja może się przydać, gdy nie jesteśmy w stanie pogodzić się z faktem, iż ktoś może postrzegać świat zupełnie inaczej od nas.

Pewna nieoczywistość tej konwencji dała o sobie znać w koncepcjach plastycznych najbliższego Wschodu (czyli Bizancjum) i najdalszego (czyli Japonii).
W pierwszym przypadku otrzymujemy obrazy (szczególnie ikony) wykonane tak jak diagramy Schlegela – przedstawione postacie i przedmioty widzimy tak, jak byśmy zaglądali przez szybkę do jakiejś innej niż nasza przestrzeni, bądź też widzimy na nich dorycko poprawne niezależnie poustawiane dziecinne wieżyczki z klocków, jak na bajecznie kolorowej ikonie bizantyjskiej.

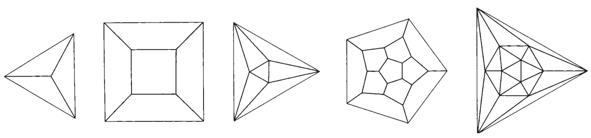
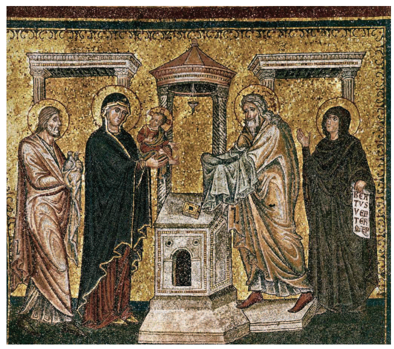
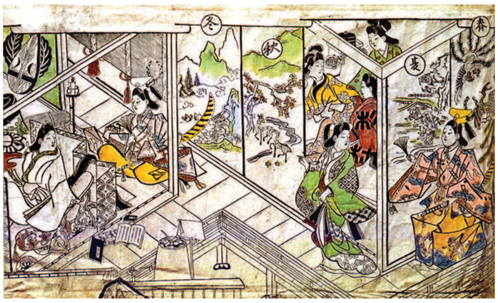


Diagram Schlegela wielościanu wypukłego otrzymamy, gdy jedna z jego ścian będzie przezroczysta, a my zbliżymy do niej oko tak bardzo, że pozostałe ściany ujrzymy poprzez nią. Tak wyglądają diagramy Schlegela wielościanów platońskich.

Zachód, bardziej surowy, próbował nawet wyłamywać się z tego gorsetu, ale pierwsze próby, jak np. w kościele Santa Maria Maggiore, prezentują linie równoległe zbiegające się w kierunku widza. Wielu interpretuje to zjawisko w kategoriach mistycznych, ale jest to chyba nieadekwatne do ówczesnej świadomości wzrokowej – nierealistyczność doryckiego gorsetu była odczuwalna, ale na próby pozbycia się jej trzeba było jeszcze poczekać.

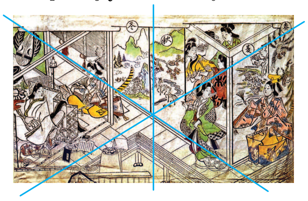


Maria Maggiore, 1296



Z kolei dalekowschodnia grafika niefrasobliwie łączy konwencję dorycką dla zorganizowania struktury obrazu z przedstawianymi dość dowolnie wpisanymi w nią szczegółami.
Grafika Morononu, założyciela szkoły drzeworytu ukijo-e(*ukijo* znaczy tyle co *świat, który przemija*, a *-e* to *malarstwo, obraz*) przedstawia dzielnicę Edo, słynną z oferowanych tam rozrywek, równocześnie stwarzając okazję widzowi dostrzec rozległą przestrzeń pejzażu i prezentując w tej przestrzennej kompozycji przedmioty nie mające trójwymiarowości ani nierzucające cienia.

Na miniaturze zaznaczyliśmy główne, postrzegane jako prostopadłe, linie komponujące drzeworyt.

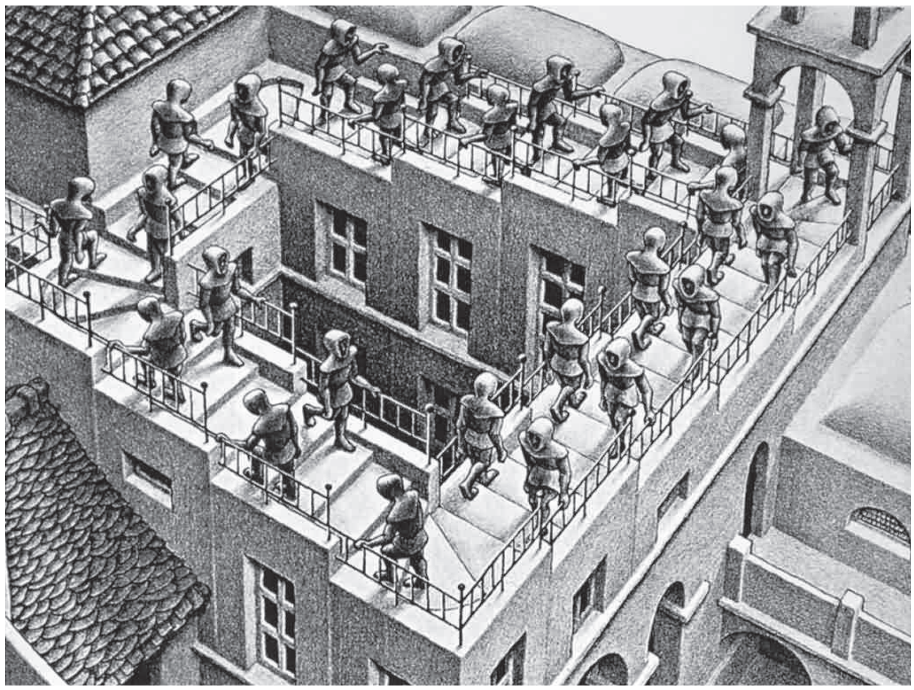


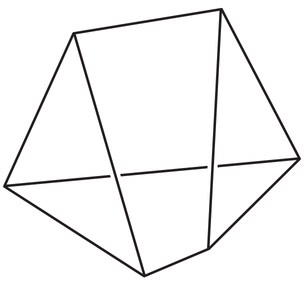
Podobnego sposobu patrzenia można się dopatrzyć w twórczości tzw. geometrystów, np. u Jana Trojana.

Jan Trojan

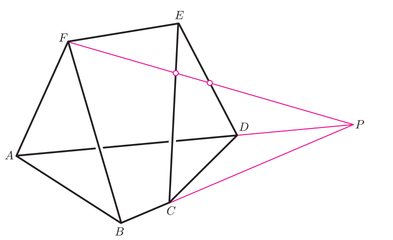
Paradoks takiego wykorzystania doryckiej konwencji rysunków (czasem zwaną – naszym zdaniem też paradoksalnie – **perspektywą równoległą**) eksponuje się za pomocą tzw. figur niemożliwych, czyli takich, które nie chcą się pomieścić w naszym, ukształtowanym przez szkolną naukę geometrii sposobie interpretowania doryckich rysunków jako przestrzenne.

Najsłynniejszą z figur niemożliwych jest chyba tzw. Trójkąt Penrose'a wymyślony przez szwedzkiego grafika Oscara Reutersvörda w 1936 roku. Istotą pomysłu jest zestawienie kilku rysunków wykonanych zgodnie z dorycką konwencją, ale przyjmujących inne kierunki za nominalnie prostopadłe – to, co widza ma zaszokować, to fakt, iż lokalnie wszystko jest zgodne z jego kanonami przedstawiania przestrzeni, a globalnie tak nie jest. Mistrzowsko te możliwości wykorzystał Maurits Cornelis Escher.





Jak głęboko tkwi w nas ta wyniesiona ze szkoły konwencja, można się samemu przekonać, widząc w zamieszczonym z lewej rysunku wielościan o trzech ścianach czworokątnych i dwóch trójkątnych, podczas, gdy rysunek z prawej dowodzi, iż takiego wielościanu po prostu nie ma. Założenie, które każdy z nas przyjmuje bez zastanowienia, każe nam każdą narysowaną łamaną uważać za płaską – gdyby wykonać model takiego obiektu z drutu, co najmniej jeden z „czworokątów" nie byłby płaski.



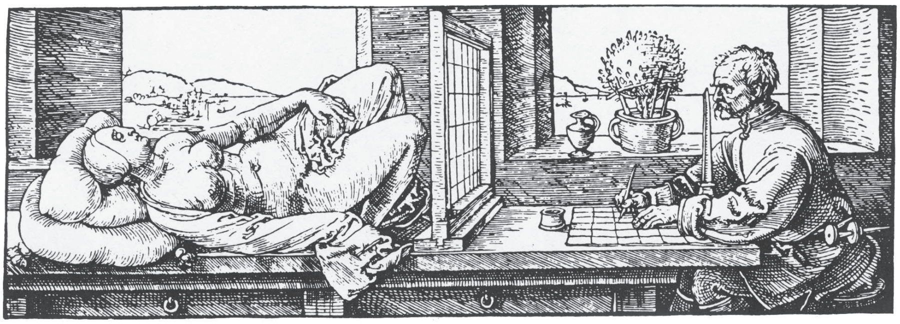
Trójkąt AFP leży w tylnej ścianie, a BFP w przedniej – odcinek PF przecina więc DE i CE, a więc rysunek jest płaski.

Optyka.

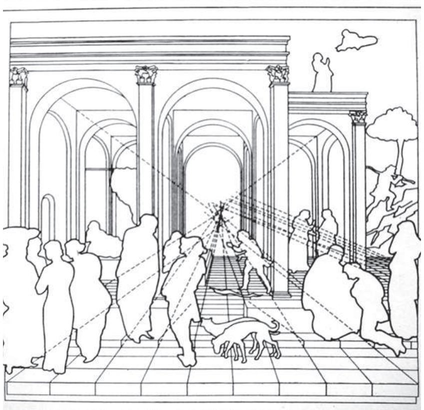
Nadchodzące Odrodzenie, kierujące ludzki umysł ku realności, starające się w przyrodzie znaleźć drogowskazy dla umysłu, również w malarstwie starało się kierować doświadczeniem, czyli optyką, z jej najprostszym i najbardziej matematycznym działem – optyką geometryczną.

Dostrzeżono prawidłowości, których objaśnienie przerastało możliwości ówczesnych geometrów. I gdy pojawiły się pierwsze podręczniki rysowania zgodnie z optyką, zbudowane były jak książka kucharska – jest przepis, który działa, bo został wielokrotnie sprawdzony, a nikomu nie przychodzi nawet do głowy, by to jakoś uzasadniać.

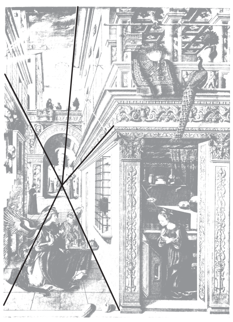
Np. Albrecht Dürer zamieszcza takie przepisy w swoim, wydanym w 1525 roku podręczniku matematyki (tak! – na dodatek podręcznik ma zaskakujący tytuł: *Matematyka dla dorosłych*).

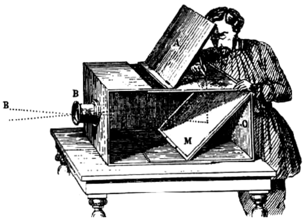


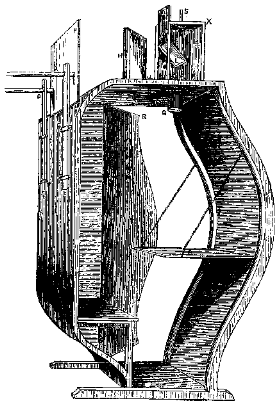
Podstawowym doświadczeniem formującym nowy sposób widzenia było niejako „przejście do granicy” z faktem, iż kąt widzenia oddalającego się równolegle odcinka zmniejsza się – jeśli zmniejsza się do zera, to da się wyrazić przez (nierealistyczne, ale prawdziwe) zdanie, że proste równoległe spotykają się „w nieskończoności”, czyli że istnieje punkt zbiegu wszystkich prostych o wspólnym kierunku.



Malarze zaczęli zmagać się z tym problemem już od XIV wieku – napisaliśmy o tym trochę w pierwszej części. Tu zwróćmy uwagę, że już na początku wieku następnego możemy znaleźć prawie udaną realizację takiej konwencji w płaskorzeźbie (Ghiberti, *Jakub i Ezaw*, 1425–1452), a pod koniec XV wieku superprecyzyjną realizację malarską (Crivelli, *Zwiastowanie ze św. Emidiusem*, 1486).







Matematyka była tu zdecydowanie w tyle – wykorzystanie takich obserwacji przez Desarguesa (przecież też artysty: architekta ogrodów) do sformułowania przytoczonej w paragrafie *Symetria* prawidłowości to dopiero lata trzydzieste XVII wieku.

Może to jednak dobrze – malarze nie sięgnęli do matematyki, lecz do fizyki i postanowili zamiast żmudnie konstruować szkielety swoich kompozycji, wykorzystać do tego fizykę. Narzędziem stały się aparaty zwane *camera obscura*, czyli pierwowzory aparatów fotograficznych, tyle że bez obiektywu i bez kliszy notującej obraz – słowem pudła z maleńkim otworem i cienkim, matowym papierem zastępującym przeciwległą ścianę. Na nim powstawał niewyraźny, odwrócony obraz, który można było delikatnie odrysować, a następnie użyć jako szkicu kompozycji i wypełnić barwą.

Wilanów, Bernardo Bellotto (Canaletto)

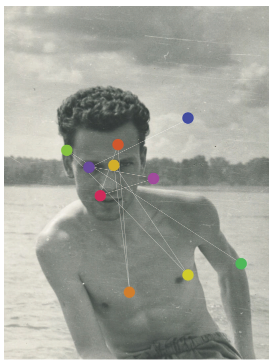
Wenecja, Giovanni Antonio Canal, stryj Bellotta (też nazywany Canaletto)

I to właściwie zabiło perspektywę zbieżną – wynalazek aparatu fotograficznego, czyli sposobu zapisania i utrwalenia obrazu na doskonalonych wersjach *camera obscura* (Talbot 1835, Daguerre 1837), uczynił z malarzy stosujących tę konwencję rzemieślników kolorujących mechanicznie uzyskiwane obrazki.

Matematyka, a dokładniej stworzona przez Victora Ponceleta geometria rzutowa (1822), malarzom już na nic nie była potrzebna. Wręcz przeciwnie – możliwość opisania perspektywy zbieżnej przez matematyczne reguły tym bardziej czyniły tę perspektywę „nieartystyczną”.

Stolik kuchenny, Paul Cèzanne

By jednak nie odwracać się od realizmu, znaleziono wyjście odwołujące się do jak najbardziej naturalnego (Strzemiński nazywa je *fizjologicznym*) spostrzeżenia, iż nie oglądamy świata jednym rzutem oka (jak aparat fotograficzny), lecz koncentrując wzrok na różnych punktach. Ponieważ zaś to, co widzimy, jawi nam się jako rzut rzeczywistości na płaszczyznę prostopadłą do kierunku spojrzenia, więc – sumarycznie – chcąc przedstawić na obrazie nasze wrażenia (*impresje*), musimy umieścić na nim relacje z wielu różnych takich rzutów. Nie da się więc tego podporządkować jednej geometrycznej konwencji. Dokładną analizę tej idei przedstawiliśmy, za Strzemińskim, w pierwszej części. Umieściliśmy tam też obszerny fragment jego (dość brutalnej) filipiki skierowanej do tych, którzy patrząc na „deformacje Cèzanne'a” nie potrafią przeżyć wizualnie tego, co przekazuje im artysta.



Jack Simon badał nawet intensywność/częstość koncentrowania wzroku na poszczególnych punktach obrazu (skala tęczowa: maksimum czerwień, minimum fiolet).

Odrębny pomysł to *pointylizm* Georgesa Seurata – spostrzeżenie, że siatkówka oka kompiluje impulsy różnych barw: można więc te impulsy wysyłać odzielnie, malując pojedynczymi kropkami (*le point*).

Dekompozycja.

Matematykę do uznania za kluczowy problem poradzenia sobie z przestrzenią (= rozmaitością 3-wymiarową) skłoniły przyczyny zewnętrzne i wewnętrzne.

Główną przyczyną zewnętrzną był fakt, że większość modeli kosmologicznych przyjmuje, iż Wszechświat jest przestrzenią trójwymiarową – poszukiwanie opisu rozmaitości 3-wymiarowych można sformułować jako pytanie, jakie są możliwe kształty Wszechświata.

Przyczyna wewnętrzna to dziwna (do niedawna) sytuacja wymiaru 3.
Z rozmaitościami 1-, 2- i co najmniej 4-wymiarowymi daliśmy sobie radę: te pierwsze sklasyfikowaliśmy – bo je można zobaczyć, a Markow 56 lat temu udowodnił, że rozmaitości wysokich wymiarów są nieklasyfikowalne, czyli żaden algorytm nie jest w stanie podzielić n-rozmaitości dla $n \geqslant 4$ na klasy złożone z rozmaitości homeomorficznie równoważnych.

Co zrobić z 3-wymiarowymi rozmaitościami zamkniętymi (= zwarte i bez brzegu), których przecież zobaczyć nie można?

Rozwiązanie problemu *zobaczyć* (co, oczywiście, nie znaczy sklasyfikować) przyniosła dekompozycja, czyli rozbicie rozmaitości na „bliższe nam” części.

Krok pierwszy zrobił Paul Heegard (1907):
każdą zamkniętą rozmaitość 3-wymiarową można rozłożyć na dwie kule z rączkami.

Rozkład taki jest prawie zawsze niejednoznaczny, co pozwala na dostrzeżenie możliwości, jaką stwarza dekompozycja – *można przemieszczać poszczególne składniki*.

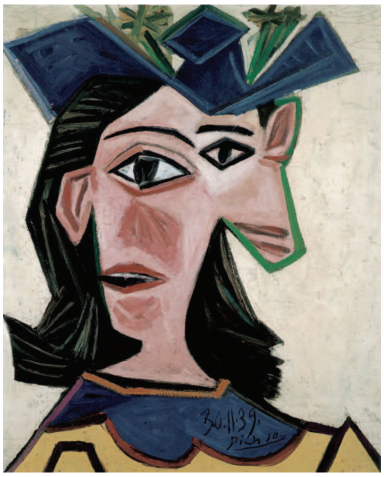
Inny rozkład zaproponował Hellmuth Kneser (1929), dążąc do „jednoznaczności rozkładu”, jak dla liczb naturalnych. Odpowiednikiem mnożenia będzie tu suma spójna (wycinamy w dwóch rozmaitościach kulę i sklejamy powstałe „dziury”). Należy też wprowadzić pojęcie rozmaitości pierwszych (to te, które można przedstawić w postaci sumy spójnej tylko wtedy, gdy jeden ze składników to S^3). John Milnor (1962) wykazał nawet, że dla rozmaitości orientowalnych jest jednoznaczność rozkładu (i „prawie” jest dla nieorientowalnych). Ale pozostał problem sklasyfikowanie rozmaitości pierwszych.

Suma spójna może zostać zastąpiona przez podobną operację, w której wycina się nie sfery, lecz torusy. Tak powstały chirurgie Maxa Dehna, gdzie (wykorzystując węzły i sploty) możemy sklejać te same rozmaitości na wiele sposobów. To okazało się bardzo płodne, przyniosło np. twierdzenie Williama Lickorisha i Andrewa Wallace'a:
Każda orientowalna, zamknięta rozmaitość 3-wymiarowa może być skonstruowana za pomocą chirurgii Dehna [i to bardzo prostej].

Idea dekompozycji zrodziła się niemal równocześnie w sposobie ekspozycji świata przez malarzy (niektórzy twierdzą, że inspirował ich w tym kierunku wszędzie obecny Henri Poincaré). Początkowo chodziło o geometryzację, wydobycie struktury podziału obiektu. *Panny z Avignon* Pabla Picassa (1907) doskonale ilustrują powody, jakie kazały nadać temu kierunkowi relacji o świecie nazwę **kubizm**.

Ten nurt reprezentowany był zwłaszcza przez Georgesa Braque'a – więcej o tym w pierwszej części. Tu warto zwrócić uwagę na naturalne dostrzeżenie waloru dekompozycji, jakim jest fakt, iż pozwala ona na jednym obrazie przedstawiać spostrzeżenia niemożliwe do równoczesnego pozyskania i to nie tylko optyczne, ale i emocjonalne, uczuciowe, wartościujące.

Za kulminację takiego spożytkowania nowej perspektywy można uznać zamieszczoną na początku tego artykułu *Geuernikę*.



Pablo Picasso

Ale to wyzwolenie z pęt zgodności czy choćby korelacji obrazu z wizualnie postrzeganą rzeczywistością nie tylko stwarzało możliwości odkrywczego potraktowania malarstwa portretowego, jak u *Dziewczyny z czarnymi włosami*, lecz także kazało zapytać, gdzie właściwie mieści się granica komunikowania się za pomocą obrazu. Narzucający się brak takiej granicy przyniósł zjawiska, które można by słusznie nazwać oszołomieniem, a które historycy sztuki klasyfikowali, tworząc seryjnie nazwy kreujące każdego niemal eksperymentatora na twórcę ruchu artystycznego.

Hannah Höch

Wykreowano więc **dadaizm** (czyli bełkotliwość). Charakteryzował ten ruch bunt przeciwko tradycyjnym wartościom, poczynając od sztuki i estetyki. Dadaiści kładli nacisk na to, co pozbawione logiki, absurdalne i wyolbrzymiali znaczenie przypadku w twórczości artystycznej. Typowy jest dla nich kolaż i fotomontaż – ideologizują to w stwierdzeniu, że tworzenie pozostaje zawsze transformowaniem, reinterpretowaniem zasobu form już istniejących.

Salvadore Dali

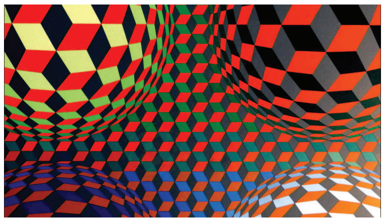
Z kolei **surrealizm** to fascynacja dziwnością i niezwykłością świata. Surrealiści zwrócili się w swoich dziełach do sfery życia podświadomego: marzeń sennych, ekstazy, halucynacji, urojeń.

Tom Wesselmann

Pop-artem nazwano kierunek w sztuce, wykorzystujący jako źródło inspiracji plastyczne zjawiska z kultury masowej i konsumpcjonizmu: komiksy, reklamy, opakowania, także obrazy telewizyjne i filmowe.

Roy Lichtenstein

A **op-art** polega na wykorzystaniu pewnych zjawisk optycznych powodujących wrażenie wibracji, pulsacji lub migotania kompozycji plastycznej. Podnosi do rangi sztuki złudzenia optyczne.



Victor Vasarely

Zapewne każdy z czytających te słowa bez trudu zarówno skojarzy zamieszczone na tej stronie obrazki z wymienionymi nazwami, jak też bez kłopotu wymieni nazwy dziesięciu następnych nurtów i koncepcji obecnych dziś w plastyce tu i teraz.

Zapewne też zakwalifikuje do jakiegoś współczesnego lub historycznego nurtu napotkane prace tworzących dziś polskich plastyków.

Jacek Yerka

Jacek Pałucha

Edward Dwurnik

Przemiany.

Można by na opisane wyżej metodologiczne rozchwianie, spojrzeć jak na swoistą ślepotę, która nie potrafi dojrzeć rzeczy współczesnych i bliskich, a do racjonalnej oceny potrzebuje co najmniej stuletniego dystansu.

Chyba jednak tak nie jest, a model wskazujący kierunek można i tym razem zaczerpnąć z matematyki.

W latach 30. XX wieku matematyka doznała metodologicznego wstrząsu, jaki stał się skutkiem agresywnego wystąpienia bourbakistów przeciwko matematyce opartej o aksjomaty i analogie wzięte z fizyki, na rzecz matematyki koncentrującej się na obiektach i ich przemianach, co dobitnie sformułowała powstała nieco później teoria kategorii. Matematyka, ponoć poprzednio statyczna i poszukująca obsesyjnie swoich źródel, stała się matematyką ruchu, wszelakich przemian. Nie całkiem bourbakistowskim przykładem tego, o co chodzi, może być rozstrzygnięcie fundamentalnej dla teorii rozmaitości trójwymiarowych hipotezy geometryzacyjnej Thurstona przez Grigorija Perelmana.

Gdyby chcieć szukać odpowiednika tego nurtu w plastyce, można by wskazać coraz częstsze demonstrowanie ruchomych instalacji czy przeróżnych *performansów*. Właściwie nie powinno to dziwić, gdy po inicjującą nowe kino *Masce* nadeszły takie dzieła, jak *Avatar* czy *Drużyna Pierścienia*.

Ale o tym opowiemy (lub zrobi to za nas ktoś inny) za następnych dziesięć lat.

⋆ ⋆ ⋆

Na zakończenie mamy pytanie: czy faktycznie udało nam się kroić tym razem tort inaczej niż przed laty?