Jest to tekst związany z odczytem wygłoszonym na LI Szkole Matematyki Poglądowej, *Modele*, Nadarzyn, sierpień 2013

Modelowanie fikcji: inwazja zombie

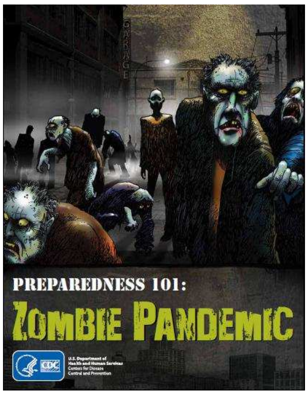
*Grzegorz KOSIOROWSKI**

Poza niezaprzeczalnym pięknem matematycznych teorii tym, co najbardziej zachęca do uprawiania matematyki, jest szeroka gama jej zastosowań i olbrzymia efektywność w modelowaniu świata rzeczywistego. Popularne jest nawet określenie „niepojęta skuteczność matematyki” (np. [W]). Warto jednak pamiętać, że modelowanie matematyczne jest czymś więcej niż tylko wyjątkowo użytecznym młotkiem wbijającym kolejne gwoździe, na których opiera się nasze zrozumienie wszechświata. Dzięki matematyce możemy modelować nie tylko to, co jest (w jakimkolwiek tego słowa znaczeniu) rzeczywiste, ale też wszystko, co tylko potrafimy sobie wyobrazić. Artykuł ten poświęcony jest właśnie przykładowi, który ilustruje tę uniwersalność zastosowań matematyki: modelowaniu tzw. inwazji zombie – katastrofy będącej popularnym tematem horrorów.

1. Zombie – wstępne informacje

Rozpoczniemy od zagadnienia inwazji zombie. Przede wszystkim trzeba odpowiedzieć na pytanie, czym (bądź kim) jest zombie? Samo pojęcie wywodzi się z karaibskich kultów voodoo, gdzie tak nazywany był człowiek, w którego ciele przebywał przywołany przez czarownika duch. Miał on być całkowicie posłuszny kontrolującemu go szamanowi i wykonywać za niego rozmaite prace. Jednak w tym artykule przez zombie rozumieć będziemy postać spopularyzowaną przez współczesną popkulturę (przede wszystkim horrory): powstałego z grobu człowieka, obdarzonego jedynie resztkami świadomości, którego instynkt zmusza do polowania na ludzi i przemieniania ich w kolejne zombie.

W najbardziej dziś znanej postaci zombie pojawiły się po raz pierwszy w filmie George’a Romera „Noc żywych trupów” w roku 1968. Od tego czasu zombie urosły i utwierdziły się w wielu dziedzinach kultury masowej: rynek z nimi związany jest wyceniany obecnie na około 6 miliardów dolarów. Poza wieloma filmami (ostatnio: *World War Z*), serialami (najpopularniejszy: *Żywe trupy*) i książkami są też tematami teledysków (np. *Thriller* Michaela Jacksona) oraz bardzo licznych gier komputerowych, a nawet planszowych (np. *Last Night on Earth*) oraz popularnej na amerykańskich kampusach gry fabularno-zręcznościowej *Humans vs. Zombies*. O popularności tematu może świadczyć fakt, że *Center for Disease Control and Prevention*, największa amerykańska agencja zajmująca się walką z epidemiami (ale też np. klęskami żywiołowymi) opublikowała podręcznik z instrukcjami dotyczącymi zachowania się w takich właśnie sytuacjach i wcześniejszego przygotowania do nich na przykładzie... masowego pojawiania się zombie.



Rys. 1.

Jakie są cechy charakterystyczene takiego „współczesnego” zombie? Oczywiście, pomiędzy rozmaitymi koncepcjami tego stwora istnieje wiele różnic, ale można też znaleźć sporo cech wspólnych. Zombie jest to po prostu „ożywione” w jakiś sposób ciało człowieka w różnym stopniu rozkładu. Jak można się domyślić, powinien wyglądać odrażająco (choć niekoniecznie, przynajmniej w pierwszych chwilach po przemianie), co zresztą jest częścią jego popkulturowej roli – w końcu ma budzić grozę i wstręt w odbiorcach danego horroru. Zombie zazwyczaj nie przejawiają własnej inicjatywy działania, z wyjątkiem instynktu poszukiwania żywych ludzi, na których mogliby żerować bądź przemieniać ich w istoty podobne sobie. Poruszają się powoli, lecz wytrwale, nie podlegając konieczności wypoczynku. Żywią się głównie ludźmi. To, w jaki sposób powstały (poza osobnikami „zarażonymi” przez inne zombie), jest najczęściej tajemnicą, którą próbują rozwikłać ludzcy bohaterowie utworów o zombie. Najczęstszymi powodami powstania zombie są tajemnicze wirusy oraz bliżej niezidentyfikowane promieniowanie radioaktywne. Często występują w dużych grupach, co stanowi szczególne zagrożenie dla ludzi, którzy chcą uniknąć zjedzenia i przemiany w zombie. Takie masowe ich pojawienie się jest zazwyczaj olbrzymim zagrożeniem dla całej ludzkiej cywilizacji, co wyróżnia ich spomiędzy innych

*Wydział Finansów, Katedra Matematyki, UEK, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, grzegorz.kosiorowski@uek.krakow.pl

występujących w horrorach potworów, które zwykle są zagrożeniem dla jednostek, czasem jakiejś okolicy, ale raczej nie dla całego świata. Właśnie taki kataklizm, znany jako inwazja lub apokalipsa zombie, jest tematem wielu utworów, a także stał się przedmiotem badań co najmniej dwu grup matematyków.

2. Modelowanie inwazji zombie

Z praktycznego punktu widzenia zombie (często w przeciwieństwie do ludzi) są idealne do matematycznego modelowania, gdyż występują w dużych, podobnie zachowujących się grupach, działają praktycznie bez udziału świadomości i przede wszystkim przemieszczają się bez widocznego celu, więc można zakładać, że czynią to w sposób losowy.

Ze względu na sposób żywienia się zombie naturalnie narzucającym się modelem dynamiki inwazji jest model typu drapieżnik-ofiara. Jednakże taki (dosyć upokarzający dla ludzi) system nie odzwierciedla całej prawdy o rozwoju inwazji: w większości filmów ludzie nie są bezbronnymi ofiarami (w każdym razie nie wszyscy) – mogą się bronić i w jakiś sposób eliminować zagrażające im potwory. Dlatego ostatecznie pomysł modelowania inwazji zombie zaczerpnięto z epidemiologii. „Zombizm" został potraktowany jako choroba zakaźna.

Tego typu modele są badane dość intensywnie od dawna. Opierają się zazwyczaj na układzie równań różniczkowych opisujących dynamikę zmian przynależności członków pewnej populacji do grup: zdrowych (lecz podatnych na infekcję), zarażonych chorobą zakaźną i martwych. Same równania tworzone są na podstawie szacowanego prawdopodobieństwa kontaktu osoby zdrowej i zarażonej oraz prawdopodobieństwa zarażenia w przypadku takiego kontaktu. W modelach związanych z inwazją zombie pojawiają się przede wszystkim dwa nowe elementy: po pierwsze, osoby zaklasyfikowane jako zmarli mogą powracać do modelu jako zarażeni „zombizmem" (w przypadku typowych chorób raczej się to nie zdarza), a po drugie, spotkanie zarażonego z podatnym na infekcję może wywoływać więcej niż jeden efekt, co powoduje powstanie dodatkowego czynnika nieliniowego, a co za tym idzie – może indukować ciekawe dla dynamiki układu efekty.

Pierwsze matematyczne modele inwazji zombie przedstawiła grupa studentów pod kierownictwem profesora Roberta J. Smitha? z uniwersytetu w Ottawie w pracy [Sm?] w 2009 roku. Prezentację ich wyników rozpocznę od tzw. modelu podstawowego, na którym bazują wszystkie kolejne.

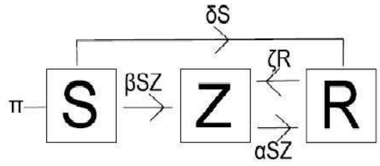
To nie jest literówka. Autor artykułu faktycznie nazywa się Smith? ze znakiem zapytania na końcu.

3. Model podstawowy

Przez S oznaczamy liczbę ludzi niezarażonych, ale podatnych na „zombizm" (zakładamy, że nie ma ludzi, którzy z założenia są odporni na zarazę). Przez Z oznaczamy liczbę aktywnych, zarażających zombie, zaś przez R – liczbę zmarłych. Prawdopodobieństwo spotkania zombie i „zdrowego" człowieka jest proporcjonalne do iloczynu SZ. Współczynnik β odpowiada za prawdopodobieństwo tego, że w wyniku takiego spotkania człowiek zostanie zarażony, a α – za prawdopodobieństwo tego, że zombie zginie (oczywiście, zgodnie z wiedzą, jaką wynosimy z horrorów, β jest znacząco większe niż α). Dodatkowo zakładamy, że ludzie mogą umierać z powodów niezwiązanych z inwazją (o umieralności decyduje parametr δ), a zmarli mogą przemieniać się w zombie (o czym decyduje parametr ζ). Początkowo do modelu był włączony również parametr $\pi(S)$ odpowiadający za przyrost naturalny, jednak został on odrzucony ze względu na założenie (pochodzące z „obserwacji") o krótkim czasie trwania inwazji zombie. Ostatecznie układ równań liniowych dla tego modelu wygląda następująco:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S \\ Z' = (\beta - \alpha)SZ + \zeta R \\ R' = \delta S + \alpha SZ - \zeta R \end{cases}$$

natomiast jego graficzna postać to



Model ten rozwiązać jest dość łatwo, ale wnioski nie są zbyt optymistyczne. Powstają dwa punkty równowagi odpowiadające sytuacji braku zombie oraz całkowitej zagłady ludzkości. Niestety, tylko ten drugi okazuje się być stabilny, (prawie) niezależnie od wartości parametrów. Zatem zombie i ludzie w tym scenariuszu nie mogą współistnieć. Praktycznie pewne jest, że w końcu zombie zainfekują wszystkich ludzi.

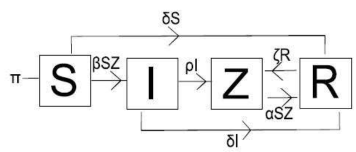
Jednakże utwory na temat zombie dostarczają szerokiej palety rozwiązań problemu: od kwarantanny, przez znalezienie lekarstwa, po bezpośrednią walkę zbrojną z potworami. Warto też uwzględnić, że ludzie nie stają się zombie natychmiast. Może któreś z tych założeń pozwoli ludzkości przetrwać apokalipsę?

4. Modele rozbudowane

Pierwszą poprawką do modelu podstawowego jest wprowadzenie nowej kategorii: I, czyli zainfekowanych. Zgodnie z zasadami większości filmów, ludzie nie zmieniają się w zombie natychmiast. Zamiast tego przez pewien okres (zazwyczaj ok. 24 godziny) podlegają stopniowej przemianie, w trakcie której nie są jeszcze zagrożeniem dla innych. Zainfekowani nadal mogą umrzeć, zanim zmienią się w zombie (z tym samym prawdopodobieństwem δ). W innym przypadku przechodzą do grupy Z (z parametrem ρ) odpowiadającym za prędkość przemiany.

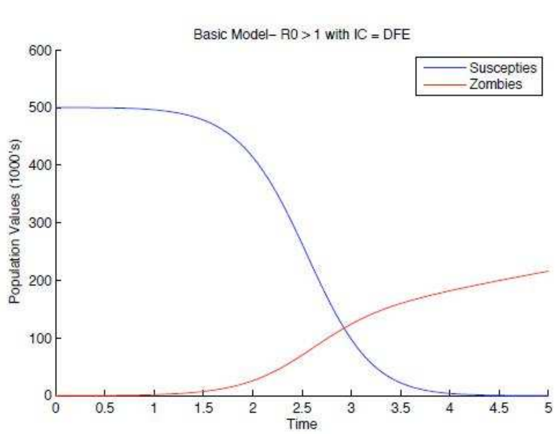
Równania opisujące ten model wyglądają następująco:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S \\ I' = \beta SZ - (\rho + \delta) I \\ Z' = \rho I - \alpha SZ + \zeta R \\ R' = \delta(S + I) + \alpha SZ - \zeta R. \end{cases}$$

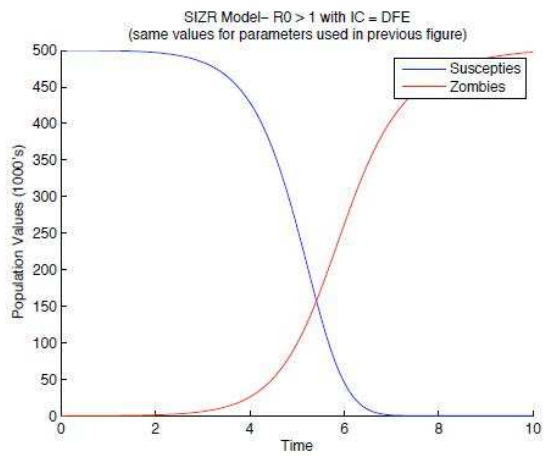


Rys. 2. Reprezentacja graficzna modelu

Analizując dynamikę układu, znów otrzymujemy dwa punkty równowagi: odpowiadający za zupełny brak zombie i za kompletną zagładę ludzkości. Niestety, znów tylko ten drugi okazuje się być stabilny, czyli i w tym przypadku zombie w końcu zainfekują wszystkich. Dzieje się to jednak wolniej niż w modelu podstawowym, co można zaobserwować na rysunkach 3 i 4 (użyto tu parametrów: $\alpha = 0.005, \beta = 0.0095, \zeta = 0.0001, \delta = 0.0001, \rho = 0.005$).

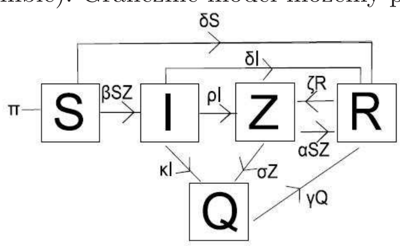


Rys. 3. Model podstawowy



Rys. 4. Model z opóźnioną przemianą

Kolejny analizowany we wspomnianym artykule model dodaje nową grupę osób: ludzi zainfekowanych lub zmienionych w zombie poddanych kwarantannie, czyli usuniętych z populacji i niemogących zarażać. Tę grupę oznaczamy przez Q. Za możliwość chwytania i umieszczania pod kwarantanną osób niebezpiecznych odpowiadają parametry σ i κ. Z kolei parametr γ oznacza prawdopodobieństwo podjęcia próby ucieczki spod kwarantanny. By spojrzeć na sprawę optymistyczniej, zakłada się, że teren kwarantanny jest chroniony idealnie, więc wszystkie próby ucieczki kończą się śmiercią (przy czym zabici w ten sposób też mogą powrócić jako zombie). Graficznie model możemy przedstawić następująco:



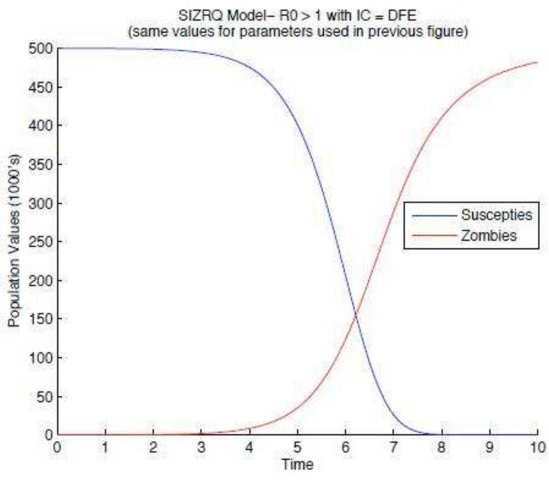
zaś równania w tym przypadku to

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S \\ I' = \beta SZ - (\rho + \delta + \kappa)I \\ Z' = \rho I - \alpha SZ - \sigma Z + \zeta R \\ R' = \delta(S + I) + \alpha SZ - \zeta R + \gamma Q \\ Q' = \kappa I + \sigma Z - \gamma Q. \end{cases}$$

Punkty równowagi modelu z kwarantanną nie różnią się od poprzednich: są nimi kompletny brak zombie oraz zupełny brak zdrowych ludzi. Ale tym razem stabilność jest bardziej delikatną kwestią. Okazuje się, że brak zombie jest stabilnym punktem równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy tzw. współczynnik reprodukcji wynosi $R_0 = \frac{\beta N \rho}{(\rho+\kappa)(\alpha N+\sigma)} < 1$ (dla dużych N można przybliżyć przez $R_0 \approx \frac{\beta\rho}{(\rho+\kappa)\alpha}$). W innym przypadku stabilnym punktem stałym jest punkt zagłady.

Teoretycznie sytuacja jest lepsza niż w dwu pierwszych modelach. Jeśli zakładamy $\beta > \alpha$ (zombie są większym zagrożeniem dla ludzi niż ludzie dla zombie), to decydującym czynnikiem staje się szybkie wykrycie i izolowanie zainfekowanych (współczynnik κ). Jednakże, ze względu na problemy techniczne (trudność wykrywania zainfekowanych oraz stworzenia i utrzymania terenu kwarantanny) mało prawdopodobne są duże współczynniki κ i σ, więc można się spodziewać $R_0 > 1$ i scenariusza zagłady (ponownie wolniejszej niż bez kwarantanny). Zatem zorganizowanie systemu kwarantanny nie daje ludzkości wielkiej nadziei na przetrwanie.

Przykładowe rozwiązanie tego scenariusza przedstawia rysunek 4.

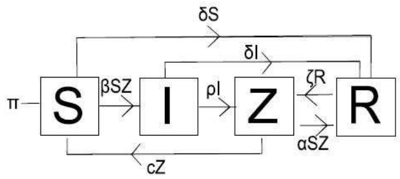


Rys. 5. Model z kwarantanną ($R_0 > 1$)

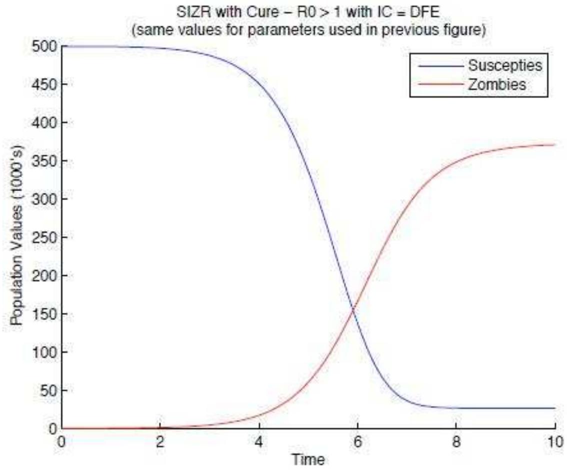
W kolejnym modelu zapominamy o kwarantannie. Zresztą nie jest już potrzebna, gdyż tym razem zakładamy, że naukowcy wynaleźli możliwe do natychmiastowego wyprodukowania lekarstwo na „zombizm”. Skoro dysponujemy lekarstwem, nie potrzebujemy kwarantanny, ale leczymy wszystkich, których moglibyśmy odosobnić. Wyleczone zombie stają się na powrót ludźmi (szansę na to oznaczamy przez c), lecz wciąż są podatne na ponowne zarażenie. Nieco optymistyczne jest w tym modelu założenie, że wyleczyć można każdego, niezależnie od tego, w jaki sposób został zombie i w jakim jest stanie. Model opisują następujące równania:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S + cZ \\ I' = \beta SZ - (\rho + \delta)I \\ Z' = \rho I - \alpha SZ - cZ + \zeta R \\ R' = \delta(S + I) + \alpha SZ - \zeta R \end{cases}$$

lub poniższy graf:



Jest to pierwszy model, w którym ludzie i zombie mogą współistnieć. Dzięki składnikowi cZ stabilnym punktem równowagi tego układu jest: $(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{Z}, \tilde{R}) = (\frac{c}{\beta}, \frac{c}{\rho}\tilde{Z}, \tilde{Z}, \frac{\alpha c}{\zeta\beta}\tilde{Z})$. Jak widać, liczba ludzi, którzy będą koegzystować z zombie, zależy głównie od efektywności leczenia: c. Według przewidywań autorów artykułu, liczba ta byłaby niewielka, jak w symulacji na rysunku 5.

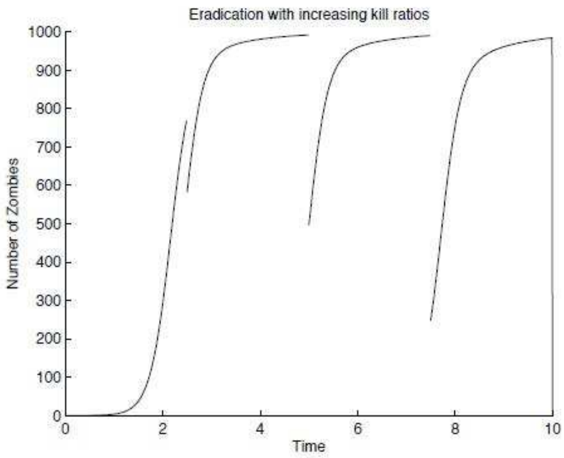


Rys. 6. Przykładowe wyniki modelu z leczeniem

Podsumowując, autorzy stwierdzili, że wszystkie „pokojowe” metody pozostawiają ludzkość w sytuacji nie do pozazdroszczenia. Na koniec zostawili scenariusz, który daje ludziom największe szanse. Zakładają w nim, że po zgromadzeniu odpowiedniej ilości zasobów (np. broni, amunicji, przeszkoleniu żołnierzy) ludzkość może wykonać strategiczny kontratak, niszcząc część populacji zombie. Pomiędzy atakami musi upłynąć trochę czasu, by uzupełnić zasoby i skoordynować działania. W każdym ataku ludzkość musi zniszczyć (procentowo) coraz więcej zombich. Model został zapisany w następującej postaci:

$$\begin{cases} S' = -\beta SZ - \delta S, \ t \neq t_n \\ Z' = (\beta - \alpha)SZ + \zeta R, \ t \neq t_n \\ R' = \delta S + \alpha SZ - \zeta R, \ t \neq t_n \\ \Delta Z = -knZ, \ t = t_n, \end{cases}$$

gdzie k oznacza procentową skuteczność pierwszego kontrataku, a n numer kontrataku. Symulacje wyglądają bardzo obiecująco:



Rys. 7. Model z kontratakami - wykres liczby zombie dla $k = 0.25$.

Jak widać, jest to pierwszy model dający ludzkości realne szanse na pokonanie epidemii. Jednakże jest to model mało praktyczny, gdyż nie wyjaśnia najważniejszego: jak przeprowadzać tak skuteczne kontrataki. Mimo tego analiza wszystkich scenariuszy doprowadziła autorów do wniosku, że w przypadku ataku zombie trzeba działać szybko i agresywnie, jeśli ludzkość ma przetrwać.

5. Dalsze badania i uwagi końcowe

Artykuł studentów z Ottawy był tylko pierwszym przyczynkiem do matematycznego modelowania epidemii zombie. Twórczo rozwinęli temat studenci Texas A & M University pod opieką profesor J.M. Linhart ([Cho], [DR], [GW]). Modyfikowali oni model podstawowy, badając m.in. założenia o przyroście naturalnym (inwazja długoterminowa), braku możliwości przekształcania wszystkich lub części zmarłych w zombie oraz (zależnym od klimatu) postępującym rozkładzie zombie. Jako że badane modele są analogiczne do dotychczasowych, nie będę tu rozpisywał wszystkich równań i wyników otrzymanych przez teksańczyków. Zalecenia dla ludzkości, będące wnioskami z ich badań, to konieczność uzbrojenia i przeszkolenia obywateli w obsłudze broni, rozproszenie lub ukrycie się (by zmniejszyć prawdopodobieństwo spotkania z potworami) oraz przeprowadzka w cieplejszy lub w jakiś inny sposób bardziej ekstremalny klimat. Oczywiście, konieczne okazuje się też zwiększenie skali funduszy przeznaczonych na matematyczne badania – w końcu mogą one uratować cywilizację.

Warto zwrócić uwagę również na inne naukowe podejścia do tematyki zombie. Np. w [CGH], na podstawie modeli z [Sm?] autorzy próbują z wykorzystaniem metod statystycznych obliczyć optymalny moment opuszczenia kryjówki w zależności od obserwacji liczby zombie w okolicy. Z kolei autor [Cho] bada prawno-podatkowe konsekwencje pojawienia się nieumarłych (przede wszystkim zombie, ale też wampirów), dochodząc do miłego politykom wniosku, że śmierć nie powinna być podstawą do uniknięcia opodatkowania i zombie również powinny się dołożyć do „umowy społecznej".

Czy wszystko to, co opisałem, jest tylko matematyczną zabawką bez żadnych zastosowań (oczywiście, jeśli nie wierzymy w ewentualność takiej inwazji)? Okazuje się, że nie do końca. Podobnymi modelami, w których „usunięci z zakresu zainteresowań" mogą do modelu powracać, można opisać choroby przechodzące w postać uśpioną, takie jak wirusowe zapalenia wątroby i niektóre grzybice. Takie sytuacje mogą też zachodzić w modelach niezwiązanych z medycyną, takich jak dynamika organizacji społecznych (np. partii politycznych). Jednakże sam Robert J. Smith? zwrócił uwagę na najbardziej spektakularne znaczenie swojego artykułu: pobudzanie zainteresowania matematyką i matematycznym modelowaniem wśród szerokiej publiczności. Informacje o matematykach badających inwazję zombie pojawiły się we wszystkich najbardziej znanych amerykańskich i kanadyjskich gazetach. Smith?

twierdzi, że otrzymał tysiące wiadomości tylko o szkolnych projektach matematycznych zainspirowanych tą pracą, nie mówiąc już o pojedynczych osobach zachęconych do tak niebanalnej nauki. Powinno to stawiać twórców programu szkolnej matematyki i nauczycieli przed niepokojącym pytaniem: jak bardzo przerażająca musi być dla uczniów matematyka, skoro dopiero towarzystwo zombie czyni ją bardziej przyjazną i interesującą?

Literatura

[CGH] B. Calderhead, M. Girolami, D. J. Higham, *Is It Safe To Go Out Yet? Statistical Inference in a Zombie Outbreak Model* , University of Strathclyde, Departament of Mathematics and Statistics Research Report 6/2010.

[Cho] A. Cho, *Surviving a zombie apocalypse*, Technical report, Texas A & M University, 2012. Final Project, Math 442.

[Chw] A.Chodorow, *Death and Taxes and Zombies*, Iowa Law Review, 1207 (2013).

[DR] F. Doe, A.Roehling, *Zombies*, Technical report, Texas A & M University, 2012. Final Project, Math 442.

[GW] F. Withrow, T. Gleasman, *When zombies attack: Round 2*, Technical report, Texas A & M University, 2012. Final Project, Math 442.

[Sm?] P. Munz, I. Hudea, J. Imad, R. J. Smith? *When zombies attack!: Mathematical modelling of an outbreak of zombie infection*, Infectious Disease Modelling Research Progress, 2009

[W] E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, t. 13, 1 (1960), 114.